ELEMENTOS DE ESTADÍSTICA Y SU DIDÁCTICA A NIVEL BACHILLERATO

Ernesto Sánchez Sánchez

INTRODUCCIÓN

La estadística juega un papel fundamental en las sociedades actuales en las que se producen y utilizan grandes cantidades de información, pues tiene que ver con las formas en que se recogen, organizan y comunican conjuntos de datos y con la manera en que estos se analizan para hacer inferencias y predicciones, y para tomar decisiones. La estadística extiende su radio de influencia a todas las disciplinas científicas y sociales ya que como afirma Moore (2000) proporciona un método general útil para tratar datos, estimar su variación y el riesgo en situaciones de azar, de manera que es importante en la cultura de la mayoría de las personas. La caracterización de Moore no excluye la importancia de la estadística en la vida cotidiana de la personas, pues los individuos a lo largo de su vida pasan por tener que entender diversidad de información estadística que puede afectar sus vidas. Asimismo, los ciudadanos tienen que contender con fenómenos variables y azarosos frente a los cuales es necesario tomar decisiones racionales. Probablemente es el reconocimiento de todas estas razones lo que ha hecho que se incluya la estadística en el currículo de la educación preuniversitaria desde hace varias décadas.

Por otra parte, en los últimos años también ha surgido con fuerza la idea de que la educación debe asegurar la formación de ciudadanos competentes, en el sentido de que puedan hacer funcionar o utilizar el conocimiento adquirido en la escuela de manera efectiva en su vida personal, social y profesional. Sin embargo, hay evidencias de que esto es difícil de alcanzar, y de que los anteriores currículos, distintos al enfoque actual en el desarrollo de competencias, no propiciaban este tipo de educación. En gran medida, las evidencias mencionadas se derivan de los resultados obtenidos en las pruebas de evaluación nacionales e internacionales. En particular, cuando estos resultados han sido negativos la sociedad los ha interpretado como deficiencias o bajos logros en los objetivos educativos nacionales. Con la intención de revertir esta situación, diversos autores han sugerido replantear los contenidos curriculares, reforzar la formación y actualización de profesores y promover el cambio de las prácticas docentes en las aulas.

En este trabajo se intenta proporcionar al profesor un instrumento que lo apoye para realizar una transición que lo conduzca hacia un enfoque de la enseñanza de la estadística basado en el desarrollo de competencias. Para hacerlo, hemos elegido tres temas tradicionales del currículo: gráficas, medidas de tendencia central y medidas de variación. Proponemos en el

primer capítulo un acercamiento clásico del tema. En el segundo capítulo, se exponen algunas de los resultados más relevantes que se han propuesto desde la didáctica de la estadística con relación a los temas elegidos. En este capítulo, queda en evidencia que el enfoque clásico no es suficiente para generar los conocimientos, habilidades y actitudes que se requieren para que los estudiantes sean usuarios competentes de la estadística. En el tercer capítulo se ofrecen algunos de los aspectos importantes que permiten entender hacia donde conviene conducir la enseñanza de la estadística. Específicamente, se revisan cuáles son las relaciones entre la educación estadística y la propuesta de un currículo por competencias. Se argumenta que la estadística, por su propia naturaleza, es especialmente adaptable a dicha propuesta y que la forma de concretarla en el aula es mediante la enseñanza basada en proyectos. El capítulo 4 consiste en un ejemplo de un proyecto propuesto por Batanero, Díaz y Gea, (2012) en el que se puede observar la potencialidad de este método de enseñanza.

CAPÍTULO 1

GRÁFICAS, CENTROS Y DISPERSIÓN

LAS ESCALAS DE MEDIDA

La escala nominal. Los datos están sobre una escala nominal si son nombres o etiquetas con los que se indica que tienen un atributo. Por ejemplo, en un censo la variable sexo es nominal, no importando que los sexos se indiquen con números, por ejemplo "0" para "hombre" y "1" para "mujer"; lo mismo los valores 0 y 1 son sólo etiquetas. Ni el orden ni las operaciones que se pueden hacer con estos, o cualquiera otros, números tienen significado alguno cuando son nominales.

La escala ordinal. Los datos están sobre una escala ordinal si son tales que pueden ser ordenados y dicho orden tiene significado. Por ejemplo, los meses del año están a una escala ordinal, pues están ordenados de acuerdo con su posición en el año, tiene sentido decir que enero está antes de febrero y éste antes que marzo, etc. En ciertas condiciones puede ser conveniente asociar los meses del año con los números del 1 al 12, el orden de éstos tiene significado. En una escala ordinal la diferencia entre dos elementos o su distancia no necesariamente tiene significado; por ejemplo, en la anterior asignación, la distancia de 1 a 6 es 5, esto no quiere decir que la distancia de "enero"(1) a "junio" (6) es "mayo"(5).

La escala de intervalos. Los datos están en una escala de intervalos si tanto el orden como la distancia entre elementos son significativos. El ejemplo más claro de datos que están sobre una escala de intervalos son los datos que provienen de mediciones de la temperatura en grados centígrados; esos datos se pueden ordenar y el intervalo entre dos valores es significativo, ya que representa la temperatura que se necesita aumentar a la primera temperatura para llegar a la segunda. En las escalas de intervalos el cero no es significativo, es convencional. La temperatura de cero grados centígrados no significa ausencia de calor.

La escala de razón. Los datos están sobre una escala de razón si pueden ordenarse, los intervalos (o diferencias) son significativos y el cero también es significativo. Estás propiedades de los datos de una escala de razón hacen significativas las razones entre los datos. Las medidas de distancia están en una escala de razón, ya se pueden ordenar, la diferencia entre dos distancias es significativa y una distancia cero representa cero desplazamientos; si la razón de dos distancias es ½, esto significa que una distancia es la mitad de la otra.

TABLAS DE DATOS Y GRÁFICAS

La primera organización que se le suele dar a los datos, una vez que son recogidos, consiste en indicar el conjunto de medidas observadas de la variable en estudio junto con el número de veces en que cada medida u observación ocurre. Los arreglos que ofrecen dicha información se llaman *distribuciones de frecuencia*. En la figura 1 se muestra una distribución en forma de tabla y en forma de diagrama de columnas sobre mortalidad por cáncer.

Panorama internacional de la mortalidad por cáncer

Mortalidad por cáncer. Panorama Internacional 2007

Tipos de cáncer	2007
Pulmón	1,400,000
Mama	549,000
Colon	677,000
Estómago	866,000
Hígado	653,000

Fuente: Informe de Cáncer Organización Mundial de Salud.

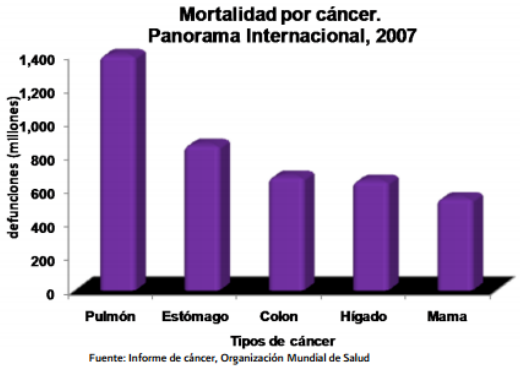


Figura 1. Tabla de frecuencia y diagrama de columnas de los tipos de cáncer más frecuentes por *Mortalidad.*

http://www.dgepi.salud.gob.mx/2010/PDFS/PUBLICACIONES/MONOGRAFIAS/PEPID_TUMORES_MALIGNOS_MEX_2010.pdf (consultada 07/07/13)

Gráficas básicas de estadística

Si se quiere presentar en una gráfica los datos de una tabla con una sola fila (o columna) de datos, solo se puede elegir entre los siguientes cinco tipos básicos:

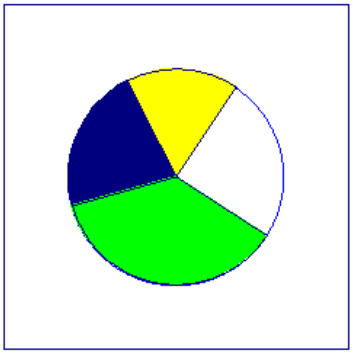


Diagrama de sectores

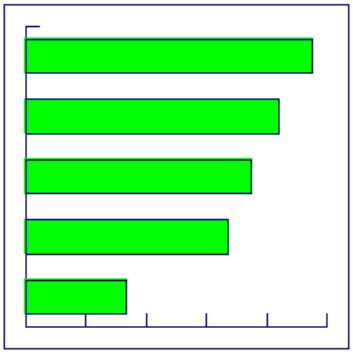


Diagrama de Barras

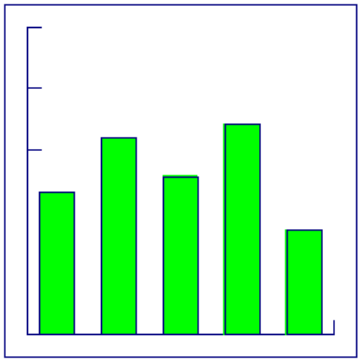
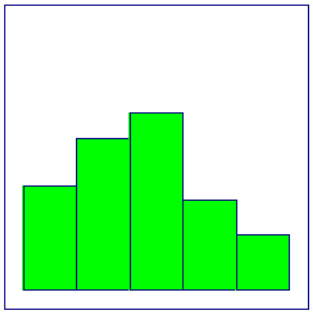
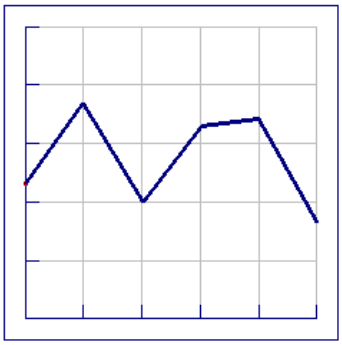


Diagrama de Columnas



Histograma



Gráfica Poligonal

Figura 2. Tipos de gráficas

Hay dos criterios generales para elegir un tipo de gráfica para presentar los datos:

Diagrama de sectores

Este diagrama resulta conveniente elegirlo cuando la variable es nominal u ordinal, con no más de seis valores distintos; es importante tener en cuenta que los datos deben cubrir una totalidad (100%). Cada sector es proporcional a la frecuencia del valor de la variable que representa. En el ejemplo de la Figura 3, se presenta un diagrama de sectores del número de municipios gobernados por cada partido (en 2011):

Partido	Municipios
PRI	15210
PAN	473
PRD	322
Otros	135

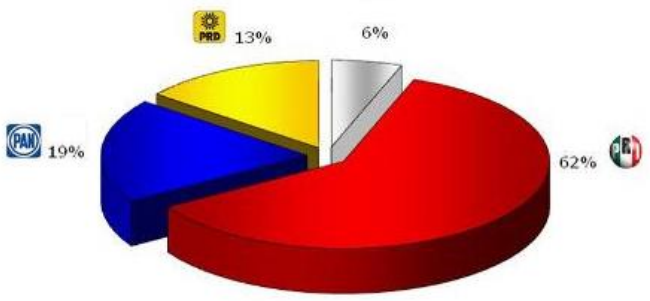


Figura 3. Tabla de frecuencia de Municipios gobernados por los partidos http://www.fenamm.org.mx/site/index.php?option=com_content&view=article&id=187&Itemid=123 (Consultada en: 07/07/2013).

Diagrama de Barras

Este tipo de diagrama también es una opción conveniente cuando la variable es nominal y, a diferencia del diagrama de sectores, no pierde claridad aun cuando hay un número grande de valores de la variable. Por ejemplo,

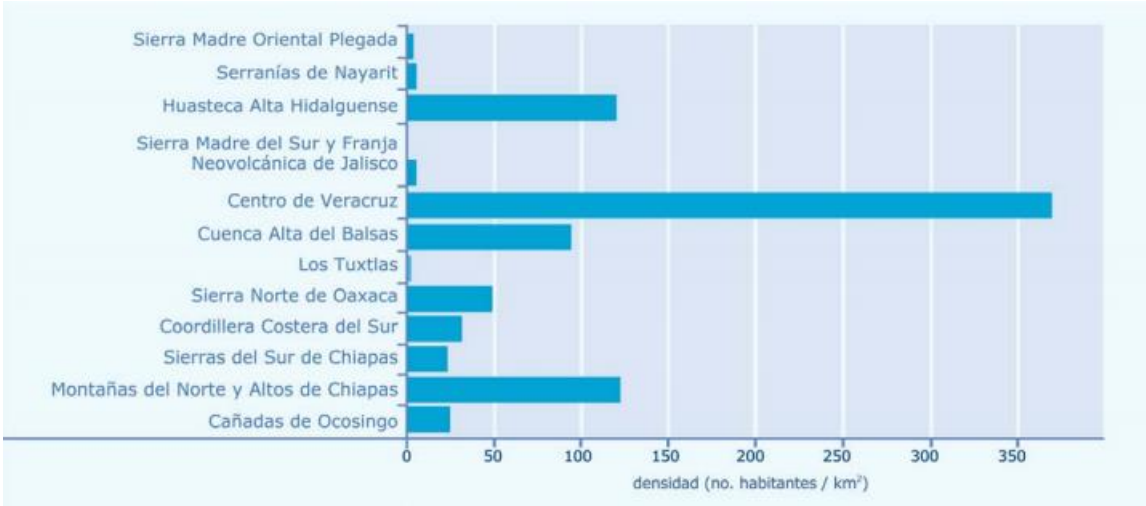


Figura 4. Densidad poblacional (No de habitantes por kilómetro cuadrado) en los boques de montaña de México y su área de influencia (3 km).

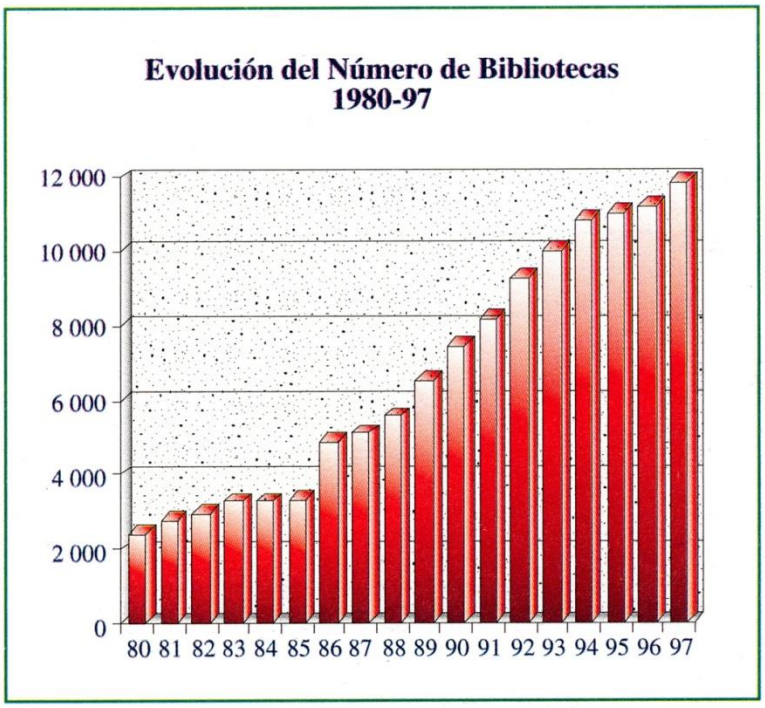
Fuente*:* Conabio (2010). *El Bosque Mesófilo de Montaña en México: Amenazas y Oportunidades para su Conservación y Manejo Sostenible*. México: Gobierno Federal.

Diagrama de Columnas

Se prefiere un diagrama de columnas cuando la variable independiente tiene valores sobre una escala ordinal. A diferencia del diagrama de barras, el de columnas no admite una reordenación de los valores de la variable independiente, ya que estos tienen un orden natural. Por ejemplo, supongamos que la variable independiente toma los valores de los

meses del año, resultaría inapropiado seguir un orden diferente al de la dirección del tiempo.

Veamos la gráfica “Evolución del número de bibliotecas” que se presenta a continuación. Observemos que los años que van de 1980 a 1997 constituyen la variable independiente, la cual ahora se representa en el eje horizontal; la variable dependiente “número de bibliotecas” se representa en el eje vertical. Este diagrama tiene algunos elementos decorativos, como el de representar las barras para dar el efecto de que son de tres dimensiones y el jaspeado de la superficie de fondo detrás de las barras. Por lo demás, las líneas horizontales y las divisiones en los ejes son elementos necesarios de una buena gráfica de columnas; los diagramas en los que se omite alguno de éstos pueden ser aceptables, pero baja su calidad.



Fuente: INEGI, *Anuario Estadístico*, Estados Unidos Mexicanos, 1999.

Nota: En muchos textos se refieren a los diagramas de columnas también como diagramas de barras. Lo importante no es el nombre, sino la elección de la forma adecuada para mejorar la comunicación.

Histograma y gráfica poligonal

Estas formas de presentación de la información se prefieren cuando la variable tiene valores sobre una escala de intervalo o de razón. Esto significa que el eje horizontal es una recta numérica en el que cada punto corresponde a un número significativo. El Histograma se compone de una serie de rectángulos, cada uno de los cuales tiene como base un *intervalo de clase* y, generalmente, la altura de cada rectángulo representa la frecuencia con la que se presentan datos contenidos en el intervalo que se representa.

El Histograma no es simplemente un diagrama de columnas con las barras juntas, ya que en el histograma tiene sentido el ancho de los rectángulos e incluso en algunos diseños los intervalos puede no ser iguales. Mientras que en un diagrama de columnas el espacio entre las columnas y su ancho es convencional, en el histograma el ancho de los rectángulos porta información.

Ejemplo:

Embarazadas según aumento de peso durante la gestación,
Centro de Salud "Luis Pasteur", 1991

Aumento de Peso*	Número	Porcentaje
6 a 8	68	53.13
9 a 10	24	18.75
11 a 12	16	12.50
13 a 14	20	15.62
Total	128	100.00

* En kilogramos enteros.

Para hacer el histograma de la información que está representada en la tabla se debe observar que la variable independiente "Aumento de peso" es una variable continua, pero si se dibujan los intervalos tal como se miran en la tabla obtendríamos espacios vacíos:

Pero es fácil darse cuenta que no es poco probable que haya habido personas que aumentaron alrededor de 8.25 kg o 8.75 kg, es decir, que seguramente se obtuvieron valores

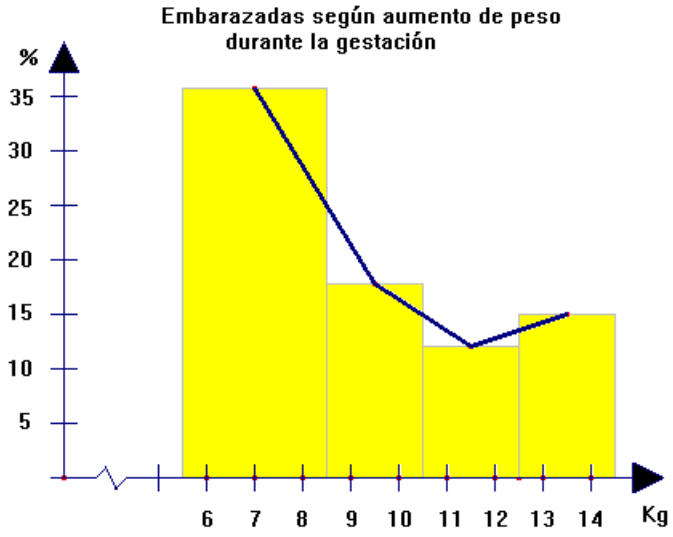
que corresponden a los “hoyos” de la recta dibujada arriba. Se puede suponer que los que colectaron los datos llevaron a cabo un redondeo, así, aumentos de pesos cerca de 8.25 lo registraron como 8 y 8.75 como 9. Bajo este supuesto (que es el más natural en estos casos) los “hoyos” se “rellenan” dividiéndolos entre dos y adhiriéndolos a los intervalos adyacentes. Haciendo lo anterior se obtienen nuevos intervalos que llenan el segmento en el que varían los datos. Los puntos medios de cada intervalo se llaman *marcas de clase*. A continuación se presentan los intervalos y su marca de clase y más abajo el *histograma* correspondiente:

(5.5, 8.5] su marca de clase es 7

(8.5, 10.5] su marca de clase es 9.5

(10.5, 12.5] su marca de clase es 11.5

(12.5,14.5] su marca de clase es 13.5



ESTADÍSTICOS IMPORTANTES

A cada conjunto de datos se le pueden asociar valores que dicen algo acerca de sus elementos, a esos valores se les llama *estadísticos*. Por ejemplo, si los datos de una colección están sobre una escala al menos ordinal, su *valor mínimo* es un *estadístico*; éste proporciona información de todo el conjunto, a saber, que cualquier valor de la colección es mayor o igual que él. Los estadísticos más conocidos y utilizados son la *moda*, la *mediana* y la *media* o promedio.

La *moda* es el dato o puntuación que aparece en la lista con mayor frecuencia.

La moda es el estadístico más importante de una lista de datos cuando estos están sobre una escala nominal. En el ejemplo 3.1 lo importante es saber qué canción ganó con un número

mayor de llamadas. En el segundo ejemplo la moda de los datos es 49, pero este valor no es tan importante, en su lugar, es más importante el intervalo de moda, es decir, el intervalo que tiene mayor número de puntuaciones: (51 –60); a ese intervalo pertenece el resultado que obtuvo Juan.

La *mediana* de una lista de datos es el número que divide la lista en dos partes, de tal manera que la mitad de los datos son menores o iguales a la mediana y la otra mitad son mayores o iguales a ella.

La mediana es un estadístico que propone un "centro" o un "valor central" para el conjunto de los datos. La mediana tiene sentido para conjuntos de datos que están al menos sobre una escala ordinal y resulta muy eficiente para datos precisamente sobre una escala ordinal. En el ejemplo 3.2 la mediana es el valor que deja 25 puntuaciones por debajo y 25 puntuaciones por arriba. Para determinarla con facilidad se ordenan los valores de la lista y con ella se cuentan 25 puntuaciones.

24	29	31	31	35	37	38	39	42	43
45	45	47	48	49	49	49	49	50	51
51	52	53	53	53	54	54	55	56	56
57	58	59	63	63	64	64	66	68	69
69	70	73	73	74	75	78	81	84	90

La mediana es entonces el valor intermedio entre 53 y 54, es decir: 53.5. Observe que en este caso la mediana no coincide con ninguno de los valores de la lista. De paso podemos agregar con relación a la preocupación de Juan que la puntuación que obtuvo está por arriba de la mediana.

La *media* o *promedio* de un conjunto de datos numéricos es el número que se obtiene de sumar los datos y dividirlos entre el número total de ellos.

La *media* es el estadístico más utilizado cuando las puntuaciones están sobre una escala de intervalo o de razón. En la escuela es muy conocido y utilizado el *promedio* que no es otra cosa que la media de las calificaciones obtenidas. En el lenguaje de algunas especialidades

se habla de la estatura promedio, del peso medio, etc. esos valores corresponden con el concepto de media que acabamos de definir.

Como los valores del ejemplo 3.2 están sobre una escala de razón la media para ellos tiene sentido, así que podemos obtenerla. Sumemos todos los valores y la suma obtenida la dividimos entre 100:

Suma de todos los valores = 2766

$$\text{Media} = \frac{2766}{50} = 55.32$$

Media de datos agrupados

En ocasiones no se cuenta con la lista de datos sino con una tabla de frecuencias. En esos casos también se puede calcular la mediana multiplicando cada marca de clase por su frecuencia, sumar todos los productos y finalmente dividirlo entre la suma de las frecuencias.

Para ejemplificar cómo se calcula la media de datos agrupados volvamos a la tabla del ejemplo 3.2:

Intervalo	Marcas	Frec.
20 – 29	//	2
30 – 39	///// /	6
40 – 49	///// /////	10
50 – 59	///// ///// /////	15
60 – 69	///// ///	8
70 – 79	///// /	6
81 – 90	///	3
91 – 100		0
total		50

Las marcas de clase son los puntos medios de cada intervalo, en el caso anterior son:

25 35 45 55 65 75 85 95

cada uno de estos valores se multiplica por su frecuencia y se suman:

$25\times2 + 35\times6 + 45\times10 + 55\times15 + 65\times8 + 75\times6 + 85\times3 + 95\times0 = 2760$

Entonces se divide este número por el total de frecuencias que es 50, obteniéndose:

$$\text{Media} = \frac{2760}{50} = 55.2$$

Debemos observar que la media de los datos agrupados no es exactamente igual a la obtenida cuando los datos están sin agrupar, pero es muy aproximada; en el caso anterior la diferencia es sólo 0.11.

Mediana

Para ejemplificar el caso de la mediana en datos agrupados en frecuencias consideremos los datos de la tabla anterior (edad de las madres al tener su primer hijo). Señalamos anteriormente que cuando los datos se agrupan pierden su identidad y que la marca de clase asume la representatividad de los datos del intervalo. En este caso tendríamos 17 mamás que tuvieron su primer hijo a los 17 años, 15 que lo tuvieron a los 24 años y así sucesivamente. Como se tienen 51 datos ordenados, la mediana se encuentra en la posición 26 debido a que $P_m = \frac{n+1}{2} = \frac{51+1}{2} = 26$.

Es decir la mediana se encuentra en el segundo intervalo dado que el acumulado al primer intervalo son 17 datos, mientras que el acumulado en el segundo intervalo son 32 datos. Lo anterior nos conduce a que la mediana se encuentra entre el valor 21 y 27, que son los límites del intervalo que contiene a la mediana.

Una expresión que nos permite calcular la mediana es la siguiente:

$$Mediana = L_m + \left(\frac{\frac{n}{2} - \sum f}{f_m} \right) c$$

Donde*:*

L_m: Límite inferior del intervalo que contiene a la mediana.

n: Total de datos.

c: Amplitud del intervalo que contiene a la mediana.

f_m : Frecuencia del intervalo que contiene a la mediana.

$\sum f$: Suma de frecuencias anteriores al intervalo que contiene a la mediana.

Como se puede ver, para utilizar la fórmula es muy importante que primeramente se identifique el *intervalo que contiene a la mediana*, ya que todos los elementos hacen referencia a él.

Para el caso que estamos analizando se tiene lo siguiente:

Intervalo que contiene a la mediana: $21-27$

$L_m = 21$

$n = 51$

$c = 7$

$f_m = 15$

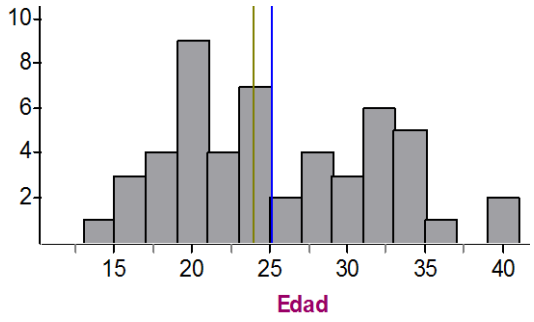
$\sum f = 17$

Sustituyendo:

$$Mediana = L_m + \left(\frac{\frac{n}{2} - \sum f}{f_m} \right) c = 21 + \left(\frac{\frac{51}{2} - 17}{15} \right) 7$$

$$Mediana = 24.96 \text{ años}$$

Obsérvese la similitud que hay en este caso entre media aritmética y la mediana, dado que los datos siguen una distribución aproximadamente simétrica, lo cual se puede ver en el siguiente histograma.



MEDIDAS DE VARIABILIDAD O DISPERSIÓN

Las medidas de tendencia central no son suficientes para una adecuada descripción de los datos, ya que solo nos indican el valor central alrededor del cual se encuentran los datos. Es necesario conocer otras medidas que nos indiquen el grado de dispersión o variabilidad de los datos, para poder tener una idea más precisa de su comportamiento. Para comprender mejor lo anterior consideremos el caso de dos alumnos que obtuvieron las siguientes calificaciones en un semestre:

Alumno 1:	7	7	8	9	9
Alumno 2:	6	7	8	9	10

En ambos casos la media aritmética y la mediana son iguales a 8. Sin embargo, las calificaciones del segundo alumno son más variables que las del primero (ver figura). Así que a pesar de que ambos tuvieron el mismo promedio, en términos estadísticos ambos conjuntos de datos no tienen el mismo comportamiento.

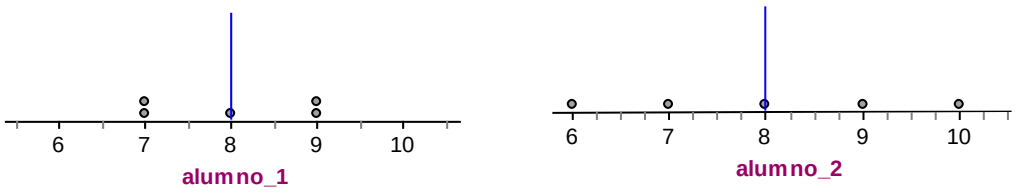


Fig. : Dos conjuntos de datos con igual centro pero diferente variabilidad

Entonces, en el análisis de datos es importante conocer el centro de un conjunto de datos, pero también se requiere conocer qué tan lejos del centro se encuentran los datos. En los siguientes párrafos abordaremos diferentes medidas que nos permitirán evaluar la variabilidad en los datos.

Rango. La medida de variabilidad más sencilla que existe es el rango. Representa la distancia entre el dato más pequeño y el dato más grande del conjunto. Esto es:

Rango = dato mayor - dato menor

Los datos que se muestran a continuación representan los niveles de máximos de monóxido de carbono en la zona Noroeste del área Metropolitana de la ciudad de México en la primera semana del mes de febrero de 2003 (Fuente: Centro de Control de la Red Automática de Monitoreo Atmosférico).

16 24 24 42 25 42 36

← Rango →

Rango = 42 - 16
= 26

Obsérvese que el rango depende solo de los datos extremos, por lo que resulta muy sensible a datos atípicos. Además no considera al centro de los datos, que debe ser la referencia respecto a la cual se mide la variabilidad. Debido a ello tiene poca utilidad. Ejemplos de sus aplicaciones pueden ser cuando se reportan temperaturas máximas y mínimas, índices máximos y mínimos de contaminación, o en cartas de control de calidad de un producto, donde se reportan los extremos de la variable que se está midiendo en un período de tiempo. En todos los casos anteriores el rango proporciona una *visión global de la variabilidad*.

Desviación estándar y varianza

La desviación estándar es la medida de variabilidad más conocida y utilizada. Nos proporciona un valor típico que nos describe qué tan lejos se encuentran los datos de la media aritmética. Un elemento clave para entender la desviación estándar es el de *desviación*. Entenderemos por desviación, como la *distancia de un dato respecto a la media*. En un conjunto existen muchos datos, por lo tanto tendremos para cada uno de ellos una desviación.

La desviación de un dato respecto a la media se representa de la siguiente manera:

$$desviación = x - \bar{x}$$

Donde:

x : Es un dato del conjunto

$\bar{x}$: Es la media aritmética del conjunto de datos

De la expresión anterior se deriva que la desviación puede ser negativa o positiva, dependiendo si el dato es menor o mayor a la media aritmética. Para mostrar lo anterior consideremos una gráfica de puntos con los datos de la contaminación por ozono utilizados en el cálculo del rango:

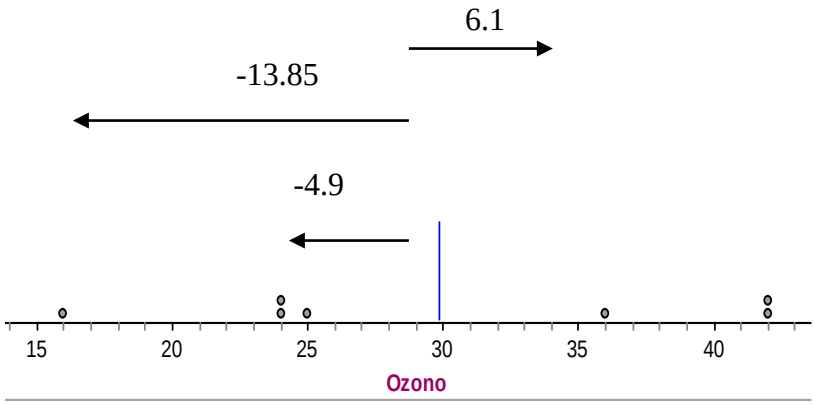


Fig. Diagrama de puntos con la media de los datos y algunas desviaciones

En la sección anterior señalamos que la media aritmética constituía el punto de balance o equilibrio de un conjunto de datos. Ahora que introducimos el término de desviación, podemos ver que ello implica que *la suma de las desviaciones de los datos respecto a la media es igual a cero.* Esta es sin duda es una importante propiedad de la media. Simbólicamente se expresa de la siguiente manera:

$$\sum_{i=1}^{n}(x - x_i) = 0$$

Si calculamos las desviaciones para los puntajes de ozono, veremos que se cumple lo anterior.

Puntajes de Ozono	**Media**	**Desviaciones**
16	29.85	16-29.85= -13.85
24	29.85	24-29.85= - 5.85
24	29.85	24-29.85= - 5.85
42	29.85	42-29.85= 12.15
25	29.85	25-29.85= - 4.85
42	29.85	42-29.85= 12.15
36	29.85	36-29.85= 6.15
		$\sum desviaciones = 0$

En la búsqueda de una expresión para calcular la desviación estándar de un conjunto de datos, introduciremos el concepto de *desviación cuadrática***,** el cual consiste en elevar al cuadrado las desviaciones. Ahora todas las desviaciones serán positivas. Esto es:

$$\sum_{i=1}^{n}(x-\bar{x})^2 = (-13.85)^2 + (-5.85)^2 + (-5.85)^2 + (12.15)^2 + (-4.85)^2 + (12.15)^2 + (6.15)^2$$

$$\sum_{i=1}^{n}(x-\bar{x})^2 = 616.85$$

El resultado anterior representa la suma de las desviaciones cuadráticas de todos los datos. Si dividimos dicho resultado entre el total de datos, estaremos calculando el promedio de las desviaciones cuadráticas. A este resultado se le denomina *varianza***,** y es otra medida de variabilidad de los datos.

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}(x-\bar{x})^2}{n-1} = \frac{616.85}{7-1} = 102.80$$

Entonces, la *varianza viene siendo el promedio (media aritmética) de las desviaciones cuadráticas de un conjunto de datos.*

Si extraemos la raíz cuadrada al resultado anterior, se tendrá el promedio (media aritmética) de las desviaciones. A dicho resultado se le conoce como desviación estándar.

$$\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x-\bar{x})^2}{n-1}} = \sqrt{102.80} = 10.13$$

A partir de un conjunto de datos hemos explicado el proceso que se sigue para calcular la varianza y la desviación estándar. Ahora es necesario definir su simbología, para lo cual haremos dos distinciones importantes:

a) *Cuando los datos provienen de una población*

La desviación estándar se representa mediante la letra σ y se expresa de la siguiente manera:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x-\mu)^2}{N}}$$

Por su parte, la varianza, que es el cuadrado de la desviación estándar se expresa:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x-\mu)^2}{N}$$

b) Cuando los datos provienen de una muestra

La desviación estándar se representa mediante la letra S y la varianza mediante S^2 respectivamente.

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x-\bar{x})^2}{n-1}}$$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x-\bar{x})^2}{n-1}$$

Observaciones:

- μ es la media de la población
- $\bar{x}$ es la media de la muestra
- n es el total de datos en la muestra
- N es el total de datos en la población
- En el caso de la muestra el denominador es $n-1$ en lugar de n.

La razón de dividir entre $n-1$ y no entre n en el caso de la muestra, es porque se ha determinado que de esta manera se puede estimar con mayor precisión la media de una población, en situaciones de inferencia estadística.

ACTIVIDADES Y PROBLEMAS

1.- Observa la tabla y el diagrama que se presentan a la derecha y responde lo que se pide en cada inciso.

a) ¿Cuál es el título general del cuadro?

_____

b) ¿Cuál es el título del diagrama?

_____

c) ¿Qué tipo de variable se mide?

_____

d) ¿Qué representan los números dapos en porcentajes en el diagrama de sectores?

_____

e) Redacta dos enunciados en lo que expreses una opinión sugerida por los datos del diagrama:

_____

_____

_____

_____

f) ¿Cuál es la fuente?

_____

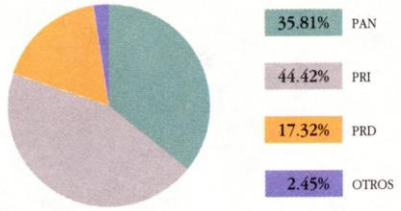
GOBIERNO Y POLÍTICA

DATOS GENERALES

CONCEPTO	2000
Entidades federativas	32
Municipios	2,443
Senadores	128
Diputados federales	500
Estados gobernados por el PRI	19
Estados gobernados por el PAN	7
Estados gobernados por el PRD	4
Estados gobernados por una coalición	2
Ciudadanos en el padrón electoral (millones)	59.58

POBLACIÓN GOBERNADA POR PARTIDO (ÁMBITO MUNICIPAL), 2000 (%)

PAN	PRI	PRD	OTROS
35.81	44.42	17.32	2.45



Fuente: Aguayo, S., 2000, *El Almanaque Mexicano*, Grijalbo, México.

2. Observa la siguiente tabla. Diseña un diagrama de sectores. Determina cuál es la variable independiente y cuál la dependiente.

Parque vehicular, 1998

Automoviles	67.7%
Camiones de carga	31.5%
Autobuses	0.8%

Fuente: Aguayo, 2000, *El Almanaque Mexicano*, Grijalbo, Mexico.

3. Con los datos que se presentan en la tabla “Distribución de caso de cáncer en hombres y mujeres” diseña un Diagrama de Barras para cada uno de los sexos. Antes responde las preguntas.

a) ¿Cuál es la variable independiente para cada diagrama?

b) ¿Cuál es la variable dependiente para cada diagrama?

c) ¿Por qué no es conveniente representar la información en diagramas de sectores?

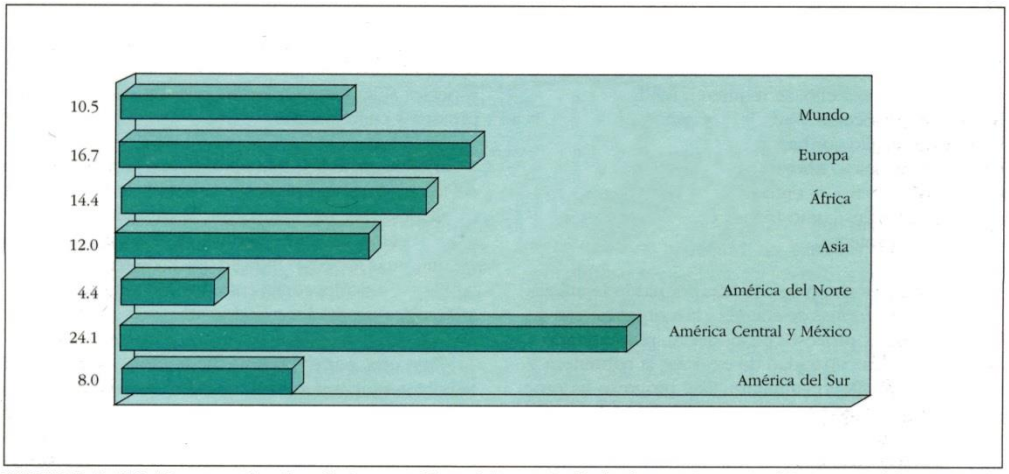
DISTRIBUCIÓN DE CASOS DE CÁNCER EN HOMBRES Y MUJERES, 1995

LUGAR	LOCALIZACIÓN	CASOS	%
MUJERES			
1	Cuello del útero	15,749	33.2
2	Mama	7,791	16.4
3	Ovario	1,684	3.5
4	Cuerpo del útero	1,432	3.0
5	Estómago	1,258	2.7
6	Glándula tiroides	1,211	2.6
7	Ganglios linfáticos	1,179	2.5
8	Tejidos blandos	1,080	2.3
9	Vesícula biliar y vías intrahepáticas	763	1.6
10	Colon	728	1.5
HOMBRES			
1	Próstata	3,674	14.2
2	Estómago	1,620	6.3
3	Ganglios linfáticos	1,566	6.1
4	Tejidos blandos	1,332	5.2
5	Testículos	1,233	4.8
6	Tráquea, bronquios y pulmón	1,139	4.4
7	Vejiga urinaria	1,136	4.4
8	Laringe	842	3.3
9	Encéfalo	702	2.7
10	Riñón y otros órganos urinarios	660	2.6

Fuente: Registro Hispatológico de Neoplasias en México, 1999.

4.- Observa el siguiente diagrama de barras. Indica dos aspectos en los que el diagrama puede ser mejorado, teniendo en cuenta las recomendaciones para elegir el tipo de gráfica o diagrama que se dieron en el texto.

Tierras deterioradas a nivel mundial y por regiones, 1945-1990
(Porcentaje de tierras fértiles que sufrieron degradación grave o moderada)



FUENTE: Emily T. Smith y otros, *Growth vs. Environment. The push for sustainable development*, International Business Week/International Soil Reference & Information Centre, mayo 1992.

5. Los datos de la siguiente tabla corresponden a la presión sanguínea sistólica de 278 hombres adultos saludables.

a) Determina los intervalos de clase y redefine los intervalos de manera que se cubra la recta.
b) Diseña el histograma correspondiente

Presión Sanguínea	*Frecuencia*
100-104	2
105-109	6
110-114	13
115-119	25
120-124	31
125-129	47
130-134	53
135-139	42
140-144	30
145-149	17
150-154	8
155-159	4

c) Traza su polígono de frecuencia

6. Considerar las calificaciones de los dos alumnos mencionados al inicio de del tema:

Alumno 1:	7	7	8	9	9	$\bar{x} = 8$
Alumno 2:	6	7	8	9	10	$\bar{x} = 8$

a) Pro simple inspección: ¿Cuál de los dos conjuntos de datos tiene mayor variabilidad?

b) Calculen la desviación estándar y verifique que coincide con su respuesta al anterior inciso.

CAPÍTULO 2

ESTUDIOS EDUCATIVOS SOBRE GRÁFICAS, CENTROS Y DISPERSIÓN

El análisis de datos se apoya fuertemente en las representaciones gráficas debido a que los datos cuantitativos desplegados en forma visual ponen en evidencia algunas de sus características relevantes, que no pueden ser percibidas si sólo se observa la lista de datos o si se revisan los datos uno a uno. Esta potencia de las representaciones gráficas es muy útil para la comunicación en nuestra sociedad altamente tecnificada. Sin embargo, la lectura e interpretación adecuada de la información mostrada en gráficas y la elección y elaboración de gráficas para mostrar información contenida en los datos, no son habilidades que se adquieran espontáneamente, sino que es necesario que sean objeto de la enseñanza.

ESTUDIOS SOBRE GRÁFICAS ESTADÍSTICAS

Diferentes niveles de lectura de datos

Una componente importante en la que han avanzado las investigaciones en didáctica de la estadística es en la identificación de diferentes niveles de lectura de los datos representados en tablas o gráficas. Por ejemplo, Curcio (1987) describe cuatro niveles distintos de lectura que cada uno de ellos requiriendo mayor comprensión que sus antecesores.

1. El primer nivel es el de *leer los datos:* el lector logra identificar los datos individuales del conjunto y con ello puede responder las siguientes dos preguntas: ¿El dato *x* pertenece a la gráfica?; ¿Cuál es la frecuencia del dato *x*?
2. El segundo nivel es el de *leer entre los datos*, el lector percibe relaciones relevantes entre los datos que le permiten responder preguntas como ¿Cuál es el valor mínimo? ¿Cuál es el máximo?, ¿Qué dato tiene mayor frecuencia? Este nivel incluye hacer comparación e incluso identificar en la gráfica valores como la moda, la mediana y la media. Aunque de mayor dificultad, la estimación de las medidas de dispersión también están a este nivel.
3. El tercer nivel es el de *leer más allá de los datos*, el lector realiza predicciones e inferencias a partir de los datos sobre información que no se refleja directamente en la gráfica. Por ejemplo, ¿Qué forma, media y/o dispersión tendrá la distribución de

la población? Si se obtiene un nuevo dato ¿Es razonable pensar que pertenece al mismo conjunto (distribución)?

4. El cuarto nivel es el de *leer detrás de los datos,* un lector en este nivel además de hacer inferencias o predicciones también puede valorar la calidad de una gráfica y la validez y fiabilidad de los datos que representa. ¿Es la fuente confiable? ¿Se pueden verificar las características del muestreo? ¿El muestreo fue el apropiado para el tipo de estudio?

El aprendizaje de la lectura de gráficas se debe distribuir a lo largo de la educación preuniversitaria y en el bachillerato el objetivo debiera ser que los estudiantes alcancen los niveles 3 y 4.

Dificultades y errores comunes en la elaboración de gráficas

a) Dificultades en la formación de una distribución de frecuencias

Los resultados de muchas investigaciones en las que se observa una variable cuantitativa de alguna población, en primera instancia, se representan en una lista de datos. Para graficarlos, es necesario formar una distribución con ellos, es decir, identificar cada valor y su frecuencia. Una vez hecho lo anterior, se representan en el eje horizontal los diferentes valores de la variable y en el eje horizontal sus frecuencias respectivas. Esta manera de proceder no es fácil de realizar, como se muestra en Arteaga, Batanero, Ortiz y Contreras (2011), quienes hallaron que más del 25% de una población de 207 futuros profesores fue incapaz de elaborar la distribución y graficarla.

Un error común que refleja la dificultad para formar la distribución de una lista de datos es la de considerar la pareja (orden de aparición, magnitud del número). Por ejemplo, se asigna la siguiente tarea:

Arroja un par de dados 10 veces y suma los resultados, anótalos en una lista y grafícalos

Los estudiantes que ignoran cómo formar la distribución, ante un conjunto de datos como el que se muestra, hacen la gráfica de la Figura 1a, en lugar de la gráfica de la Figura 1b.

Por ejemplo, si se obtiene la lista de datos: 3, 5, 7, 6, 4, 7, 8, 3, 5, 5. La gráfica de la izquierda no es correcta, pero es común. La gráfica de la derecha es la gráfica la distribución.

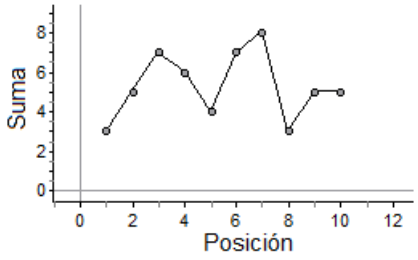


Figura 1a.

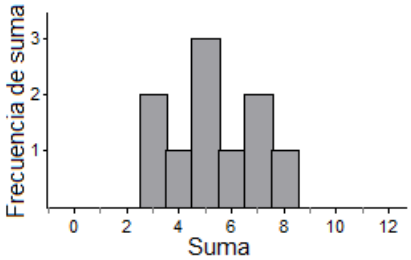


Figura 1b

b) Dificultades para definir las escalas o divisiones de los ejes

Los errores relacionados con las escalas aunque pueden provenir del desconocimiento de convenciones acerca de la elaboración de las gráficas, también provienen de deficiencias en los antecedentes matemáticos que se requieren. Li y Shen (1992) encontraron que varios de sus estudiantes elegían una escala inadecuada para mostrar aspectos relevantes del conjunto de datos o bien que no alcanzaba a cubrir el campo de variación de la variable representada. Otros omitían las escalas en alguno de los ejes horizontal o vertical (o en ambos) y muchos no especificaban el origen de coordenadas. Hay otros que utilizan escalas no homogéneas.

Detrás de algunas de las anteriores dificultades se encuentra la tendencia a no ver en el eje *X* una recta numérica, sino sólo un espacio para indicar los valores que se presentan en los datos, como si fueran etiquetas.

ESTUDIOS SOBRE MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL

Se suelen llamar medidas de tendencia central a la *moda*, la *media* y la *mediana*. Las definiciones matemáticas de estos conceptos se dieron en el capítulo 1 de este libro, ahora revisaremos algunos aspectos que han surgido en las investigaciones sobre este tema. La mayoría de estudios didácticos realizados a la fecha se enfocan en la noción de *media* y, por esta razón, en esta sección se comenta más extensamente este concepto que los otros dos.

La *media aritmética* de un conjunto de datos numéricos es un concepto engañoso, pues su definición es muy simple: *la suma de datos entre el número de datos del conjunto*. Aunque en algunas situaciones los estudiantes pueden tener algunas dificultades en cálculos relacionados con la media, por ejemplo, para calcularla a partir de datos agrupados o en problemas que suelen llamarse de *media ponderada*, en realidad, las verdaderas dificultades son conceptuales, es decir, cuando se trata de interpretarla, de atribuirle un significado apropiado, o de utilizarla en las diversas situaciones en las que su uso es pertinente.

Batanero (2000) menciona cuatro significados que suelen asociarse a la media aritmética, pero que no suelen ser bien entendidos por estudiantes, de manera que no los utilizan en las situaciones en las que podría ser útil. Tales significados se agrupan en los siguientes cuatro rubros:

- Distribución equitativa de cantidades dispares
- Estimación de una cantidad desconocida, en presencia de errores de medida
- El valor con mayor probabilidad al tomar un elemento al azar de una población
- Representante de un conjunto de datos

A continuación se precisa en qué consiste cada uno de ellos a través de ejemplos.

Distribución equitativa de cantidades dispares

En muchas situaciones en las que se tienen datos que varían uno del otro, se desea simplificar la situación pensando qué pasaría si no hubiera dicha variación; este es un mecanismo del pensamiento que lo potencia. Por ejemplo, sabemos que la producción de petróleo en el país es variable, no obstante se ofrecen noticias como la siguiente:

Produce PEMEX 2 millones 562 mil barriles de petróleo diarios en enero

01 de Marzo de 2013. **Boletín No. 28**

Se entiende que algunos días de enero se producirán más de los 2.56 millones, otros menos; de hecho quizá los domingos no se produzca ninguno. Pero lo que uno entiende es que los 2.56 millones son un promedio. Este valor es accesible al pensamiento y a la memoria y es fácilmente comunicable, comparado con una tabla formada por la lista de la producción de cada uno de los 30 días de enero.

A pesar de que este significado es muy utilizado en la práctica y pareciera que no se presta a confusión se ha encontrado que en ciertos contextos los estudiantes no lo interpretan adecuadamente. Por ejemplo, se les pregunto a estudiantes de secundaria lo siguiente:

Un estudio de investigación encontró que los estudiantes de escuelas primarias ven en promedio 3 horas diarias de televisión.

a) Qué significa promedio “3 horas de TV diarias” en este enunciado
b) ¿Cómo crees que se obtuvo este promedio?

Algunas de las respuestas al inciso a, son:

- Los niños ven la TV aproximadamente tres horas diarias
- La mayoría de niños ve la TV tres horas diarias

Ninguna de ellas es adecuada; la primera porque podría haber algunos niños que vean la TV cero horas, otros niños 10 horas diarias y el promedio podría ser 3; en este caso no se puede decir que 0 y 10 son aproximadamente 3. La segunda respuesta tampoco es adecuada porque podría no haber ningún niño que vea la TV las 3 horas diarias y no obstante, obtenerse el promedio de 3.

Con referencia al inciso b de la situación planteada arriba, también hay respuestas que no coinciden con lo que supone la normatividad:

- Se observó que un niño veía la TV tres horas diarias
- Se observaron muchos niños y se vio que veían la TV alrededor de 3 horas.
- Se vio que la mayoría de los niños veían la TV 3 horas diarias

Las anteriores comprensiones inadecuadas sobre la media provienen del uso informal de este concepto sin hacer las precisiones necesarias relacionadas con la definición técnica y sus propiedades.

Otras interpretaciones encontradas en niños más pequeños para la media se presentan en Watson y Moritz (2000). Estos autores estudian la forma en que los niños de diferentes edades comprenden el concepto de 'promedio' y el uso que hacen de éste en situaciones de la vida diaria. Realizaron entrevistas con alumnos de 3º de secundaria en las que plantean preguntas como las siguientes "¿Has escuchado la palabra promedio antes? ¿Qué significa para ti?" "En promedio, las familias australianas tienen 2.3 niños. Explica que significa para ti esta frase" "Supongamos que 10 familias tiene en promedio 2.3 niños. Entre ellas la familia Grant tiene 4 y la familia Cooper tiene 1, ¿Cuántos hijos podrían tener las restantes 8 familias?". Con base en las respuestas recibidas, identificaron 6 niveles de comprensión de los promedios:

1. Nivel 'pre-promedio': los niños no usan ningún término de promedio y sólo imaginan historias con cierta relación al contexto de la pregunta.
2. 'Uso coloquial de un promedio' utilizan términos como *es normal* o *es okey*. Imaginan ideas relacionadas al contexto para apoyar sus respuestas; por ejemplo, en relación con la pregunta responden historias como *"Que tienen dos niños grandes y otro que no ha*

crecido todavía", "el .2 es un niño que tiene 2 años ahora y cuando cumpla 10, contará como 1 y entonces el número promedio de niños será 3".

3. ‘Estructura múltiple del promedio’, manejan dos o más ideas como *el más común, el de en medio y, en ocasiones, el algoritmo* al describir un promedio.
4. ‘Representación con promedio’ se refieren directamente al algoritmo de la media en relación con las situaciones. Además son conscientes de que la forma decimal de una media es consecuencia del algoritmo y expresan alguna idea sobre la naturaleza de la media como representante de un conjunto.
5. Los estudiantes además son capaces de aplicar su conocimiento de la media a situaciones complejas, como completar un conjunto de valores para obtener una media dada o calcular una media ponderada, pero no ambas.
6. Hacen todo lo anterior incluyendo las dos últimas tareas mencionadas.

Varias de las dificultades que se observan en los estudios con niños pequeños se vuelven a encontrar ligeramente distintos con estudiantes de bachillerato e incluso universitarios. Por ejemplo, Mayen (2009) hizo un estudio con estudiantes de secundaria y Bachillerato en México tomando preguntas de investigaciones anteriores. Sólo el 52% de los estudiantes de Secundaria y el 80% de los de Bachillerato respondió correctamente a la pregunta “Un periódico dice que 2.2 es el número medio de hijos por familia en México. Explica qué significa para ti esta frase. Al pedirles un ejemplo concreto de distribución de 10 familias para obtener un número medio de 2.2 hijos, el número de respuestas correctas en estudiantes de Bachillerato bajó al 56%.

Aunque la interpretación de la media como *distribución equitativa de cantidades dispares* es la más cercana al algoritmo, en el sentido de que se deduce de las operaciones aritméticas que se realizan para calcularla, no está exenta de dificultades. La siguiente interpretación presenta mayor grado de dificultad.

Estimación de una cantidad desconocida, en presencia de errores de medida

En la teoría de errores de medidas físicas la media juega un papel importante y de gran utilidad. En efecto, cuando en un trabajo experimental se realizan varias mediciones de una magnitud física, en general, no se obtiene el mismo resultado. Surge entonces el problema de cuál es la mejor aproximación a la verdadera medida de la magnitud en cuestión. La

teoría de los errores establece que la mejor aproximación es la *media aritmética* cuando las mediciones cumplen las siguientes características:

- Cada medición es independiente de cualquier otra
- Se pueden cometer con la misma frecuencia, tanto errores por defecto como errores por exceso.

La media aritmética se aproximará tanto más al valor verdadero de la magnitud cuanto mayor sea el número de medidas, ya que globalmente los errores aleatorios se compensan. Este uso de la media de un conjunto de medidas de un objeto como la mejor estimación de la medida real del objeto no es una idea que surja espontáneamente en los estudiantes, y aunque el profesor lo mencione en su clase, ellos suelen no utilizarla para resolver problemas relacionados. Para comprobarlo, basta hacer preguntas como la siguiente:

Un objeto pequeño fue pesado separadamente por nueve estudiantes en una clase de ciencias, utilizando la misma escala. Los pesos (en gramos) anotados por cada uno de los estudiantes se muestran a continuación.

6.1 6.0 6.0 5.9 6.4 6.3 6.3 6.0 6.2

Los estudiantes quieren determinar tan acertadamente como sea posible el peso real de este objeto. ¿Qué valor les propondrías?

Muchos estudiantes tenderán a elegir 6.0 “porque es el que más se repite”, otros dirán que cualquiera podría servir, algunos proponen el punto medio del rango; muy pocos, propondrán la media, que de acuerdo a la teoría de errores sería la mejor estimación. Si los alumnos son los que obtienen las medidas, optan por el valor de “quien tomó la medida con más cuidado”, lo que hace intervenir apreciaciones subjetivas.

Como se verá más adelante, los problemas significativos en los que se debe aplicar la media se dan en contextos que requieren de otras consideraciones, por ejemplo, de la dispersión de los datos. Con base en ellas el analista no aplica rígidamente la regla, por ejemplo, la siguiente modificación transforma el problema anterior:

Un objeto pequeño fue pesado separadamente por nueve estudiantes en una clase de ciencias, utilizando la misma escala. Los pesos (en gramos) anotados por cada uno de los estudiantes se muestran a continuación.

6.1 6.0 6.0 15.9 6.4 6.3 6.3 6.0 6.2

Los estudiantes quieren determinar tan acertadamente como sea posible el peso real de este objeto. ¿Qué valor les propondrías?

La media en este problema es: 7.24, que sería muy probablemente una mala estimación ocasionada por el valor atípico 15.9. El analista supone que este valor es espurio, debido a un error diferente a los errores de medida esperados; entonces puede optar por dos posibilidades: 1) Excluir el valor atípico y obtener la media del resto de los datos: 6.13; 2) elegir la mediana: 6.2.

La amplia aplicación de la estadística al análisis de diferentes tipos de medidas experimentales es uno de los motivos por los que se imparten cursos de Estadística en las carreras científicas. Para explotar su potencial, el estudiante debe aprender a interpretar los diferentes conceptos y procedimientos estadísticos de manera adecuada y flexible; uno de estos es la media, que aunque parezca muy simple, encierra ideas profundas que el estudiante debe asimilar. La siguiente interpretación es otro ejemplo.

El valor con mayor probabilidad al tomar un elemento al azar de una población

La relación de la media con los fenómenos aleatorios a veces no es tan clara porque la media se presenta en estadística descriptiva de una manera y en probabilidad de otra, a saber, como el *valor esperado*. Para ver dicha relación conviene referir la situación de muestreo simple que menciona Batanero (2000), en la que se eligen elementos de una población numérica cuya media es conocida:

La altura media de los alumnos de un colegio es 1.40 m. Si extraemos una muestra aleatoria de 5 estudiantes y resulta que la altura de los 4 primeros es de 1.38m, 1.42m, 1.60m y 1.40m. ¿Cuál sería la altura más probable del quinto estudiante? (Batanero, 2000).

El error más frecuente en el problema anterior consiste en buscar el valor para el que la muestra tenga una media de 1.40m, en este caso: 1.20m. Éste surge de la creencia de los estudiantes de que la solución debe encontrarse mediante un procedimiento matemático preciso; la solución correcta, que es 1.40m, no se obtiene mediante procedimiento alguno, si no que se basa en la comprensión de lo que es una media en una distribución.

Como hemos mencionado, las interpretaciones dependen de condiciones particulares del contexto; en el caso anterior, se utiliza el hecho (conocido, pero no explícito en el enunciado) de que la distribución de las alturas tiene una forma aproximadamente normal

(En forma de campana y simétrica respecto a su media), de manera que la media coincide con el valor más probable.

Batanero (2000) al destacar este significado o interpretación de la media ofrece algunos ejemplos comunes en estadística:

> Por ejemplo, al predecir la esperanza de vida o el beneficio esperado en una inversión en bolsa, se toma la media de la variable en la población como predicción, como valor esperado, por sus propiedades muestrales derivadas del teorema central del límite. Del concepto de valor esperado se derivan muchos modelos de predicción, como los distintos tipos de regresión. Así, cuando predecimos el peso de una persona en función de su altura, usamos el peso promedio de todas las personas que en la población tienen la altura (p. 4).

Estos comentarios son válidos pues las variables de la que provienen los datos tienen distribuciones normales.

Representante de un conjunto de datos

Este significado de la *media* se utiliza muy a menudo, pero es de gran dificultad para los estudiantes. El ejemplo clásico es el promedio de calificaciones como representante o resumen de las diferentes calificaciones obtenidas por un estudiante en las materias del programa escolar. En este contexto familiar todo mundo entiende la función de la media (o promedio) como representante del conjunto de calificaciones, pero cuando se formulan problemas en otros contextos esta interpretación no surge de manera espontánea y natural. Por ejemplo, en el siguiente problema de comparación de datos:

1. En la tabla de abajo se presentan las estaturas en metros de 10 hombres holandeses:

1.87, 1.71, 1.75, 1.83, 1.85, 1.92, 1.92, 1.86, 1.70, 1.88

a) ¿Cuál es la estatura de los hombres en Holanda?

b) ¿Qué valor o número consideraste como representante de las alturas de los holandeses?

2. En la tabla de abajo se presentan las estaturas en metros de 8 hombres mexicanos:

1.74, 1.71, 1.69, 1.80, 1.76, 1.72, 1.68, 1.62,

a) ¿Cuál es la estatura de los hombres en México?

b) ¿Qué valor o número consideraste como representante de las alturas de los mexicanos?

3. ¿Cuántos centímetros son más altos los holandeses que los mexicanos? _____

4. Reúnanse con otros compañeros y comenten sus respuestas. Cada quien argumente sus propuestas y lleguen a un acuerdo sobre las respuestas correctas. En caso de duda consulte con su profesor (Sánchez, et al. 2012).

Figura 2. Ejemplo de problema en contexto de medidas repetidas

En un estudio de Orta (…) con estudiantes de secundaria, encontró que responden espontáneamente de formas muy variadas a las preguntas, pero sólo un 5% utiliza la media aritmética en sus respuestas.

Los problemas de comparación de grupos de datos o de distribuciones son muy apropiados para que los estudiantes aprendan a utilizar la media como un recurso para resolverlos y, con ello, incorporar dicho significado a su formación estadística. En la siguiente sección, referente a la dispersión de los datos volveremos a este punto.

ESTUDIOS SOBRE DISPERSIÓN

Hace relativamente poco tiempo Shaughnessy (1997) señaló que hasta esa fecha no había habido investigaciones didácticas que estudiaran las dificultades, concepciones, problemas y formas de enseñar el concepto de variación estadística. Mostró cómo los investigadores en educación estadística habían estado más interesados en el concepto de media. Esta escasa o nula investigación sobre la variación, que se puso de relieve en ese entonces, contrasta con la opinión general de los estadísticos acerca de que la variación es el corazón de la estadística (Moore 1998). A partir de entonces se han hecho importantes estudios que plantean preguntas acerca del aprendizaje de la variación.

La *dispersión* es un sinónimo de *variación* cuando ésta se refiere a un conjunto de datos numéricos. Las medidas de dispersión más comunes son el rango, la desviación media, la desviación estándar y los cuartiles (o más en general los percentiles). En la enseñanza el tratamiento de estos conceptos ha consistido, al igual que con el concepto de media, en buscar que los estudiantes se aprenda la fórmula para calcularlas, bajo el supuesto de que esto puede permitir su interpretación y uso en las situaciones-problema en las que este concepto es útil. Nada más alejado de la realidad.

A continuación se presentan algunas ideas básicas sobre el riesgo basadas en la exposición de Fischhoff y Kadvany (2011). En particular, para los fines de este artículo basta

mencionar algunas ideas de tres temas que abordan estos autores: la definición de riesgo, el análisis del riesgo y la toma de decisiones en situaciones de riesgo. El riesgo se presenta cuando hay potenciales resultados no deseados que pueden traer como consecuencia pérdidas o daños. Definir el riesgo significa especificar los resultados valiosos y los no deseados en un orden que refleje el valor que se les atribuye. En muchas ocasiones, se pueden medir los resultados no deseados o valiosos, por ejemplo, las tasas de mortalidad o el producto interno bruto. Hay también eventos en los que no hay acuerdo de cómo medirlos: pobreza, bienestar o sustentabilidad. Finalmente, hay algunos en que la sola idea de medirlos es controversial, así son las amenazas a la justicia o los daños ecológicos a la naturaleza.

Una vez que se identifican los riesgos, el problema es determinar qué tan grandes o prejudiciales son y cuáles son las posibles causas que los gobiernan. El análisis del riesgo generalmente son constructos intrincados, a menudo integran los análisis de científicos de diferentes áreas del conocimiento y toman en cuenta una diversidad de fuentes de datos o información. No obstante, hay una variedad tan amplia de fenómenos, que la lógica del análisis del riesgo puede consistir en simples conteos de datos, con cuyos resultados llevar a cabo conocidos análisis estadísticos, hasta complejas simulaciones de modelos cibernéticos conteniendo información científica de áreas especializadas además de procesos estocásticos complejos.

El análisis del riesgo ofrece información para la toma de decisiones. La teoría de la toma de decisiones en situaciones de riesgo tiene dos aspectos; por un lado, define reglas abstractas sobre lo que debería hacer la gente en situaciones de riesgo, por otro, estudia lo que hace la gente cuando se enfrenta realmente a tales situaciones: “Si la gente no sigue las reglas, quiere decir que o las personas necesitan ayuda o las reglas necesitan una revisión” (Fischhoff y Kadvany,2011,pp.65). En los casos en que el análisis del riesgo ofrece un conjunto ordenado de posibles resultados, la regla para tomar decisiones es simple: “elija la opción cuyo resultado produzca algo con la mayor cantidad del valor que usted desea tener (dinero, descanso, acres de tierras húmedas, etc.)” (Fischhoff y Kadvany, 2011,pp. 65 p. 65). La ordenación de los resultados generalmente contiene incertidumbre y está asociada a distribuciones de probabilidad. La regla entonces debe combinar el valor deseado que proporciona cada resultado con la probabilidad de que ocurra para cada posible decisión.

Un problema en el contexto de juegos

No iremos más allá de los comentarios anteriores, pues son suficientes para indicar la naturaleza del contexto de riesgo en el que se formula el problema que se propone (Figura 3). En el análisis del problema aclararemos el papel de la media y la dispersión para la toma de decisiones en la situación de riesgo que se propone.

En una feria, se invita a los asistentes a participar en uno de dos juegos. Juan puede participar en un juego, pero no en ambos. Para saber por cual decidirse observa, anota y ordena los resultados de dos muestras de 10 personas que han participado en cada juego. Las pérdidas (-) o premios (+) en efectivo que han obtenido las 20 personas se muestran en las siguientes listas:

Juego 1

15	-21	-4	50	-2	11	13	-25	16	-4

Juego 2

120	-120	60	-24	-21	133	-81	96	-132	18

Si tienes la posibilidad de participar en un solo juego ¿Cuál juego elegirías? Explica las razones de tu respuesta.

Figura 3. Ejemplo de un problema sobre situaciones de riesgo

Una respuesta relativamente aceptable es que *es igual jugar en cualquiera de los dos juegos*, esto con base en el argumento de que ambos conjuntos tienen la misma media ($\mu = 4.9$), es decir, a la larga en cualquiera de los juegos se ganará en promedio 4.9 unidades. No obstante, una respuesta más avanzada debe tener en cuenta la dispersión. Es notorio que en los datos del segundo juego hay mucha más dispersión que en los del primero (Figura 4). En este contexto, la dispersión se asocia al riesgo: el juego 2 es más arriesgado, pues aunque con base en los datos se puede conjeturar que es posible ganar cantidades mayores que en el juego 1 (el máximo en el juego1 es 133, mientras que en el juego 2 es 50) también es posible perder más (el mínimo en el juego 1 es -132, mientras que en el juego 2 es -25). La decisión depende de las preferencias y condiciones económicas del jugador, si es propenso al riesgo y tiene suficientes recursos para jugar, podría optar por el juego 2; si es conservador o no tiene suficientes recursos, le conviene elegir el juego 1.

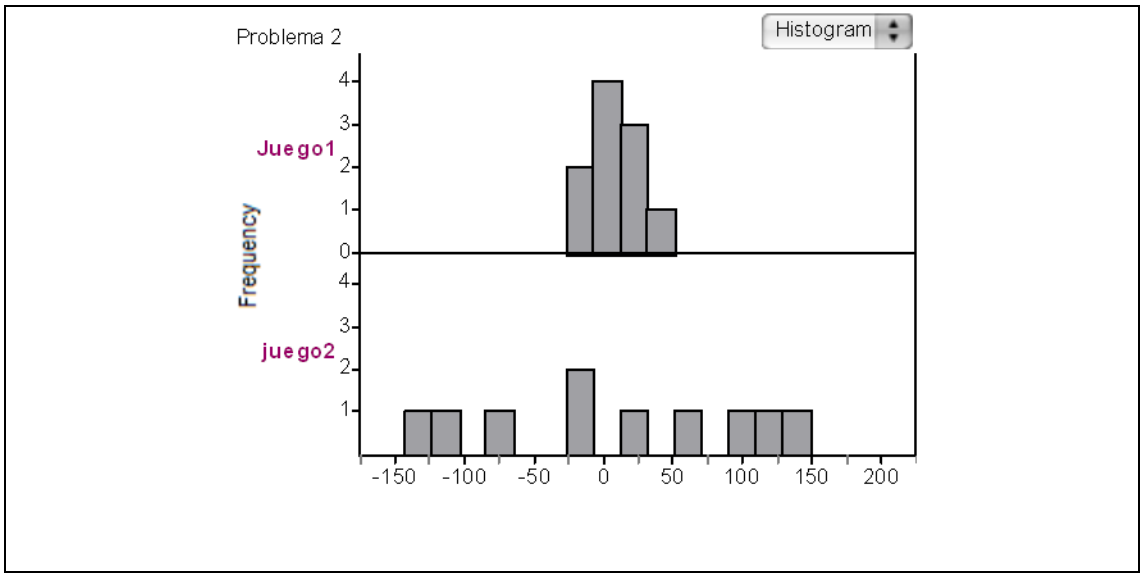


Figura 4. Gráficas del problema de riesgo.

Análisis del problema. La idea del problema es propiciar que el estudiante se ubique en una situación de riesgo, de manera que se dé cuenta que la elección de un juego u otro conlleva consecuencias en términos de beneficios-pérdidas. El primer paso en el análisis es preguntarse en qué juego globalmente se gana más dinero; esta pregunta se la hacen los estudiantes de manera natural, pero la respuesta que ofrecen es muy variada. Nuevamente pensar en la ganancia promedio de cada juego (media aritmética de los datos) y compararlas, es una idea que pocos, si alguno, la consideran; la gran mayoría omiten este paso que es crucial para el análisis. Sus comparaciones suelen ser resultado de una impresión de riesgo que les producen los datos individuales de la distribución: unos comparan los máximos de las distribuciones y hacen afirmaciones como “en el juego 2 se gana más”, otros comparan los mínimos “en el juego 1 se pierde menos”; otros podrían ignorar la cantidad precisa que se gana o se pierde y sólo cuentan cuantos perdedores (cantidades negativas) y cuantos ganadores (cantidades positivas) tiene cada juego, decidiendo que da lo mismo escoger uno u otro.

Una vez que se determina con base en la ganancia promedio que los dos juegos son equivalentes, se debe formular la pregunta ¿En cuál juego se corre más riesgo? Inferir que el juego con mayor dispersión es más arriesgado que el juego con menor dispersión ofrece un significado pertinente a la teoría del riesgo. El problema de valorar el riesgo consiste en ponderar que mientras en el juego con mayor dispersión, se puede tener la fortuna de ganar más que en el otro juego, pero también se corre el riesgo de perder más. En el juego con

menor riesgo se puede ganar menos que en el primero, pero también de perder menos. No hay una regla general que indique cuál es la mejor decisión, pues depende de la situación económica particular del jugador así como de sus creencias y actitudes ante el riesgo.

Una dificultad que suelen encontrar los estudiantes surge de la falta de información acerca de la naturaleza del juego y sobre la manera particular en que un jugador gana determinada cantidad. Muchos estudiantes llenan este vacío imaginando situaciones: unos pueden pensar en una urna con bolas numeradas, otros en juegos de caballos, etc. Encontramos que algunos estudiantes imaginan que el primer dato del primer juego (15) corresponde a un jugador y que el primer dato del segundo juego corresponde a su oponente (120) y concluye que el jugador del segundo juego le ganó al primero (por 105). Situaciones en las que se pueden coleccionar datos ignorando el modelo subyacente son frecuentes en la investigación estadística. La idea del problema es propiciar que el estudiante realice un estricto análisis de los datos interpretando la situación a pesar de dichas restricciones. El siguiente ejemplo es también de una situación de riesgo y en él es más claro la ausencia de un modelo para explicar el comportamiento de los datos.

Un problema en el contexto de salud-enfermedad

Considera que debes aconsejar a una persona que padece una enfermedad grave, incurable y mortal, pero que es tratable con medicamentos que pueden extender la vida por varios años más. Es posible elegir entre tres tratamientos. Las personas tienen diferentes reacciones a las medicinas, para algunas tienen el resultado previsto, mientras que para otras pueden ser más benéficas o más prejudiciales. En las siguientes listas se muestran los años que han vivido varios pacientes que se han tratado con una de las opciones mencionadas; cada dato de las listas corresponde al tiempo que ha sobrevivido un paciente con el respectivo tratamiento. Después se muestran las gráficas correspondientes a los tratamientos.

Tiempo en años (tratamiento 1)

5.2	5.6	6.5	6.5	7.0	7.0	7.0	7.8	8.7	9.1

Tiempo en años (tratamiento 2)

6.8	6.9	6.9	7.0	7.0	7.0	7.1	7.1	7.2	7.4

Tiempo en años (tratamiento 3)

6.8	6.8	6.9	7.0	7.0	7.1	7.1	7.1	7.2	7.4

Figura 5. Ejemplo de problema es situaciones de riesgo

El primer paso en el análisis de este problema, al igual que los anteriores, es calcular el tiempo medio de vida para cada tratamiento ($\mu = 7.04$). Con base en esta información se podría decir que cualquier tratamiento es igual, no obstante, en la medida en que lo que está en juego es de suma importancia, parece imprescindible hacer un análisis (de riesgo) más detenido. Claramente el tratamiento 1 tiene mayor dispersión (Figura 6) y, por tanto, ofrece más riesgo, en el sentido mismo del problema anterior: los datos indican que se puede vivir más tiempo que el tiempo que indican los datos en cualquiera de los otros dos tratamientos (9.1 > 7.4), pero también se puede vivir menos (5.2 < 6.8). ¿Cuál es la decisión adecuada entre elegir el primer tratamiento y cualquiera de los otros dos? Nuevamente, no hay una regla general que prescriba la mejor elección, aunque en este caso una decisión conservadora podría ser más popular que una decisión arriesgada. En este caso, decidir entre el tratamiento 2 y el 3 es más difícil, pero si el criterio de menor riesgo se ha tomado y éste se asocia con la desviación estándar muestral, los datos del tratamiento 2 indican menor dispersión ($S_2 = 0.17, S_3 = 0.18$), aunque la diferencia es tan pequeña que se pueden considerar equivalentes.

Análisis del problema. El análisis de este problema es muy similar al anterior sobre la elección entre dos juegos. El primer paso es comparar las medias, después considerar con cuidado la dispersión. Como se ha indicado, este sencillo procedimiento no suele estar dentro de las estrategias espontáneas de los estudiantes y bien puede ocurrir, que los estudiantes hayan entendido que en el contexto de perdida-ganancia es conveniente comparar las medias de los conjuntos de datos y no transferirlo a la situaciones de tiempo de vida en contextos de salud-enfermedad. Con relación al análisis de la dispersión, puede ocurrir que un mismo alumno sea propenso al riesgo en el caso de juegos de pérdida-ganancia de dinero, y sea adverso al riesgo en el caso de salud-enfermedad o viceversa. Lo importante de la consideración del riesgo es que lo interpreten de manera adecuada y no caigan en el error frecuente de creer que “mayor dispersión significa mayor tiempo de vida”, pues esto es falso.

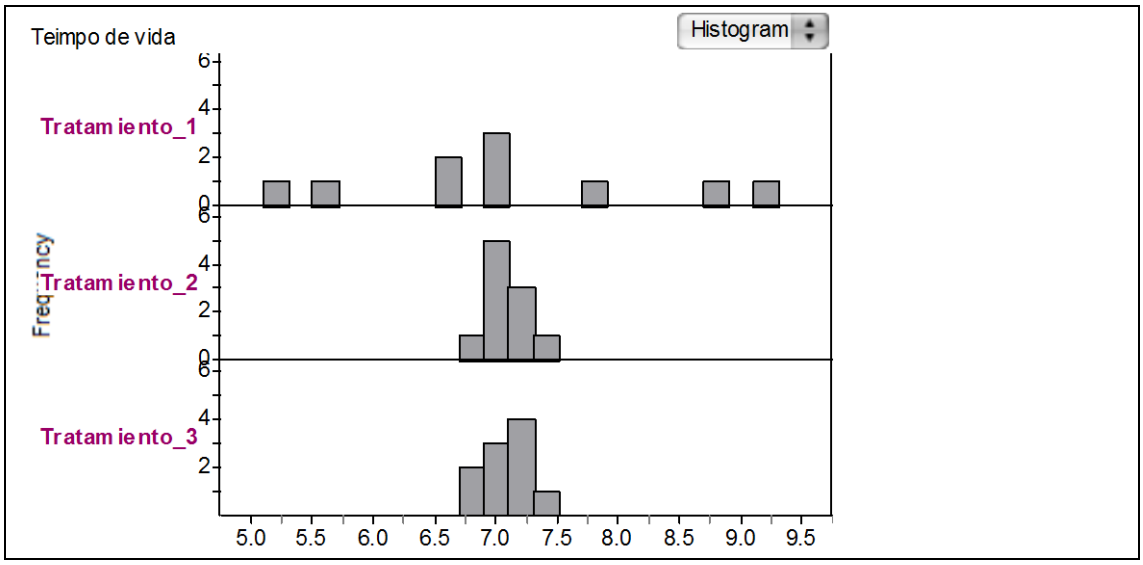


Figura 6. Gráficas de los datos del problema del tiempo de vida

Conclusión. Se han propuesto tres problemas que pueden ser útiles para diseñar lecciones de estadística para desarrollar el razonamiento estadístico de los estudiantes en los temas de media y dispersión. Las razones para hacerlo son variadas: la importancia de que el profesor cuente con problemas para cubrir los contenidos curriculares, las dificultades detectadas en el tema en cuestión y la necesidad de darles un significado que sea accesible a los alumnos. Los problemas se han adaptado al formato de comparación de conjuntos de datos, pues prefiguran problemas de inferencia, atraen el interés de los estudiantes, no son triviales y su solución requiere de los instrumentos elementales de la estadística. También se han inscrito en los contextos de mediciones repetidas (ya señalado por Batanero, 2000) y de riesgo, pues ambos ofrecen oportunidades para enriquecer el significado de las nociones de media y dispersión. La intención es explorar recursos que permitan ir más allá de las interpretaciones de la media y la dispersión que se constriñen a contextos puramente matemáticos. Se han hecho algunas recomendaciones para implementarlos en clase, acordes con el espíritu actual de las recomendaciones curriculares: dejar a los estudiantes que propongan soluciones, promover la discusión y prever los errores y falsas concepciones que ya han sido detectadas en la investigación. En el futuro, investigaciones empíricas y prácticas escolares podrían proporcionar evidencias de las ventajas y desventajas del uso de este tipo de problemas en clase.

CAPÍTULO 3

ESTRATEGIAS PARA LA ENEÑSENZA DE LA ESTADÍSTICA

La investigación en educación estadística ha desarrollado propuestas para transformar la enseñanza de la materia y ofrecer mayores probabilidades de que los estudiantes desarrollen competencias estadísticas. En este capítulo, se expondrán tales estrategias y los argumentos que las justifican.

EL CONCEPTO DE COMPETENCIAS

Existe un descontento generalizado por los logros que se obtienen de la educación matemática. Y no sólo porque haya bajos índices de aprobación en la materia, sino porque aun los estudiantes que acreditan con altas notas los cursos de matemáticas, no saben utilizarlas adecuadamente en los contextos de su vida personal o profesional donde las matemáticas serían útiles. Inerte-funcional, atomizado-holístico, enciclopédico-situado. En estos casos se habla de un conocimiento enciclopédico y no un conocimiento funcional.

En estadística, por ejemplo, hay estudiantes que aprenden a leer y construir gráficas en el salón de clase, pero no saben, ni quieren leer o interpretar las gráficas periodísticas o del INEGI; tampoco se les ocurre que una gráfica podría contribuir al análisis y comunicación de resultados en sus actividades profesionales. También se habla que el currículo tradicional fomenta el conocimiento

¿Qué son las competencias?

Conviene revisar algunas definiciones del concepto de competencia para formarse una idea del núcleo común que comparten. Para Perrenoud (2002) “una competencia es una capacidad para movilizar diversos recursos cognitivos para hacer frente a un tipo de situaciones”. Las personas tienen recursos cognitivos variados, se dice que son competentes si saben ponerlos en acción y los movilizan para realizar las tareas derivadas de las situaciones que enfrentan. Una definición más conocida es la que se formula en el proyecto Tunning (Beneitone et al. 2007): “El concepto de competencia se entiende como una combinación dinámica de atributos, en relación con conocimientos, habilidades, actitudes y responsabilidades, que describen los resultados de los

aprendizajes de un programa educativo o lo que los estudiantes son capaces de demostrar al final del proceso educativo".

Las competencias se ubican en la relación entre conocimiento y acción, entre teoría y práctica. De lo que se trata es de que en la educación se asuma el compromiso de formar ciudadanos capaces de utilizar sus conocimientos en la solución de los problemas que encontrarán en su vida personal, social y laboral. Aunque nunca se ha dicho que la educación persiga lo contrario, en realidad se ha asumido que la adquisición de conocimientos es una condición previa para su aplicación y que la escuela se encarga de proporcionarlos. Se supone que una base sólida en este sentido servirá para aplicar tales conocimientos en la vida personal, social y laboral/profesional. Pero estos supuestos, aparentemente válidos, los cuestiona una realidad en la que la gente aprende a actuar al margen de los conocimientos adquiridos. Peor aún, cuando intentan ponerlos en juego no saben cómo hacerlo o lo hacen de manera deficiente o equivocada.

La competencia matemática

Dado que hay una estrecha relación entre la matemática y la estadística, conviene entonces repasar algunas formulaciones que aclaran lo que significa la competencia matemática. En el proyecto PISA se define la como la "capacidad de un individuo para identificar y comprender el papel que las matemáticas juegan en el mundo, realizar razonamientos bien fundados y utilizar e involucrarse en las matemáticas de manera que satisfaga las necesidades de la vida del individuo como ciudadano constructivo, comprometido y reflexivo" (INCE 2004, p. 12) [PISA]

En esta declaración se subrayan los aspectos que diferencian a la propuesta de la educación por competencias de otras, como la de resolución de problemas o la guiada por el constructivismo. Esto es, se enfatiza en la relación de la matemática con el mundo (aplicaciones) y en su utilidad en la vida del individuo. Parece mentira que la sencillez y especificidad de esta declaración origine serias discusiones ya que en ningún currículo o programa de estudios se ha pretendido que lo que se enseñe y aprenda de las matemáticas en la escuela no le sirva mayormente al estudiante en su vida. Pero en los hechos, para muchos estudiantes, en la enseñanza tradicional la utilidad que obtienen de estudiar matemáticas se reduce a no reprobar la materia y a librar el obstáculo que representan para realizar el proyecto de obtener un título profesional; después de esto difícilmente se acuerdan de lo aprendido en esta materia.

Algunos investigadores que analizan y promueven el currículo por competencias, consideran que cuando se habla de la *utilidad de la matemática en la vida del individuo* se corre el peligro de enfocarlo desde un punto de vista estrecho, que puede llevar a pensar en la "matemática de la tiendita", es decir, en la aritmética elemental que se necesita para saber cuánto se tiene que pagar en

el mercado. Para evitar esta connotación o reduccionismo proponen el concepto de "contextos o situaciones socialmente relevantes" en las cuales el conocimiento matemático es significativo. Desarrollar una competencia matemática sería entonces ser capaz de utilizar el conocimiento matemático en las situaciones socialmente relevantes. Hay que notar, que para la matemática en general, no hay consenso acerca de cuáles son tales situaciones socialmente relevantes y que la elaboración de un currículo por competencias debería partir de su constitución. Pero el caso de la estadística es diferente, pues en esta disciplina están muy bien definidas, de tal manera que se puede hablar de competencias estadísticas.

Relaciones entre la matemática y la estadística

Para entender el papel de la estadística en el currículo por competencias, conviene tener en cuenta cuál es la discusión acerca de la relación entre la estadística y la matemática. Varios estadísticos y educadores estadísticos defienden que la estadística no es una rama de las matemáticas, ni siquiera dentro de las matemáticas aplicadas. La estadística tiene características propias que conviene tener en cuenta para entender mejor las propuestas de cómo enseñarla.

Entre las diferencias fundamentales se encuentran:

a) La consideración de los datos, los cuales en estadística, a diferencia de las matemáticas, no se pueden separar del contexto del que provienen
b) La importancia de la recolección de datos, así como las circunstancias en las que se lleva a cabo.
c) La centralidad de la variabilidad
d) La presencia de la incertidumbre en sus resultados

Esta discusión sobre si la estadística es o no parte de las matemáticas se resuelve si se enfoca la enseñanza de las matemáticas desde un currículo por competencias. Pues se puede pensar que la estadística proporciona situaciones socialmente relevantes en las que se utilizan las matemáticas. Esto quiere decir, las situaciones de la estadística son apropiadas para desarrollar competencias matemáticas. De esta manera se debe considerar entonces que la noción de competencia estadística está relacionada con las competencias matemáticas.

El concepto de competencia estadística

Éste se define mediante los siguientes puntos:

a) Poseer y saber utilizar los conocimientos básicos de la estadística
b) La habilidad para interpretar y evaluar críticamente la información estadística, argumentos relacionados con los datos o con fenómenos estocásticos

c) La habilidad para discutir y comunicar sus reacciones a tal información estadística, tal como comprender el significado de la información y sus implicaciones.
d) La actitud de formular preguntas que puedan responderse mediante la recolección y análisis de datos.
e) Las destrezas para diseñar y llevar a cabo investigaciones estadísticas

La estadística es naturalmente multidisciplinar, en el sentido de que su campo de acción se sobrepone con otras disciplinas. La definición de Moore (1998) es relevante en este sentido, pues "la estadística es un método intelectual general que se aplica dondequiera que haya datos, variación y azar. Es un método fundamental porque los datos, la variación y el azar son omnipresentes en la vida moderna" (p. 134). Para Cobb y Moore (2000) "la estadística es una disciplina metodológica. Ella existe no por sí misma sino para ofrecer a otros campos de estudio un conjunto coherente de ideas y herramientas para tratar con datos. La necesidad de una disciplina como esta, surge de la omni-presencia de la variabilidad". Sin duda, estas características de la estadística la hace favorable al enfoque por competencias.

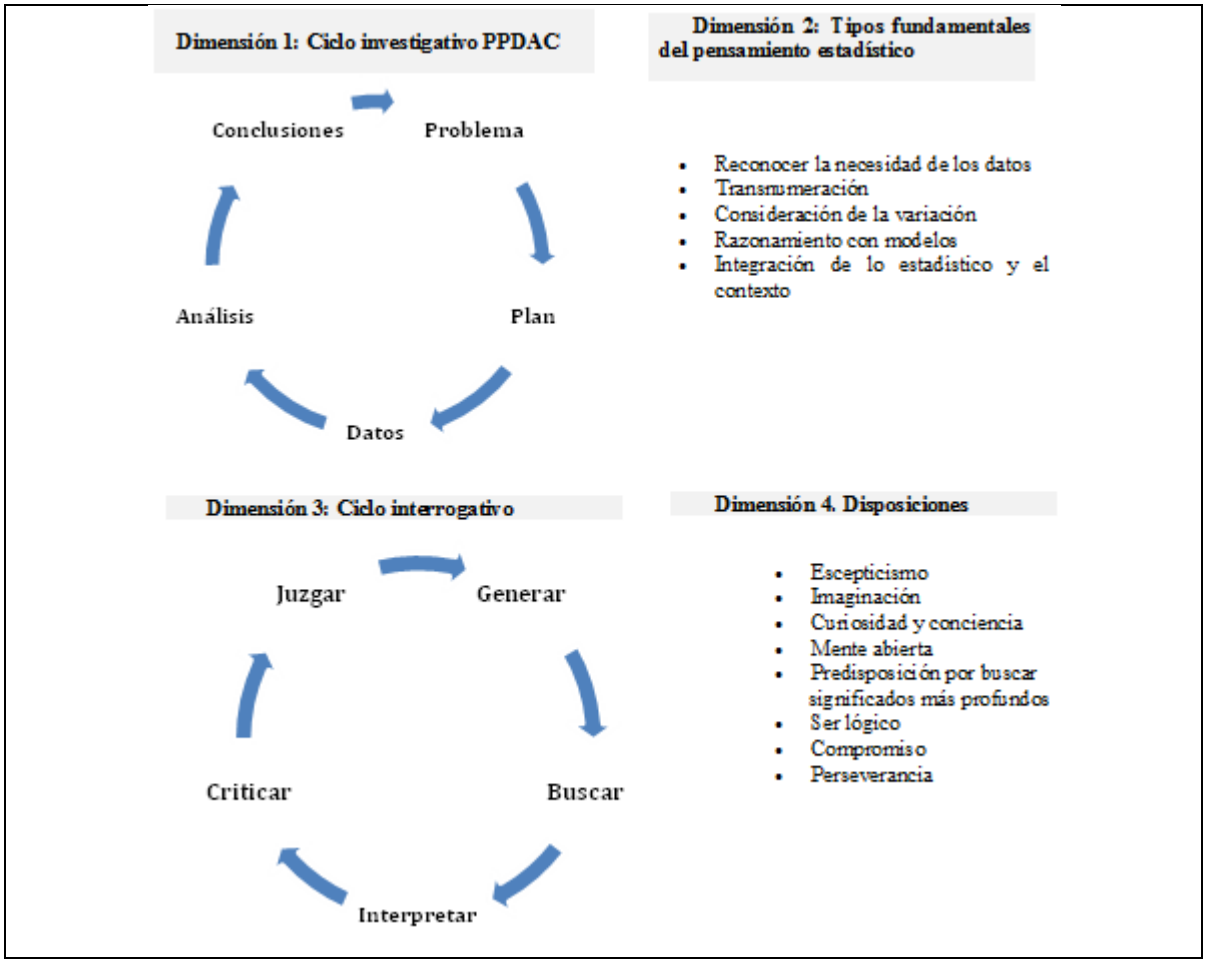
Un punto de referencia importante para definir las competencias acerca de cualquier disciplina es observar lo que hacen los expertos en esa disciplina. En el caso de la estadística, Wild y Pfannkuch (1999) hicieron una investigación sobre cómo piensan y actúan los estadísticos cuando trabajan en su profesión; de ese estudio, formularon un modelo del pensamiento estadístico, que se expone en la siguiente sección.

El modelo de pensamiento estadístico de Wild y Pfannkuch (1999)

El modelo tiene cuatro dimensiones (ver Tabla 1), las cuales organizan el conjunto de aspectos que pone en juego un estadístico cuando resuelve problemas estadísticos. El primero es el *ciclo investigativo* (Dimensión 1), formado por los cinco pasos (PPDAC) que se ponen en juego al desarrollar uno: El interés y la habilidad de formular una *Pregunta* susceptible de responderse con datos; el diseño de un *Plan* para obtener los datos; la obtención o recogida de *Datos* llevando a cabo dicho plan; el *Análisis* de los datos y obtención de *Conclusiones*. Para resolver un problema el estadístico profesional sabe que debe desarrollar un ciclo investigativo; cuando lo desarrolla tiene pone en práctica ciertos esquemas de pensamiento que lo guían, estos constituyen los *Tipos fundamentales de pensamiento* (Dimensión 2) y son: a) *La necesidad de los datos*. El matemático enfrenta muchos de sus problemas mediante la reflexión y la representación de sus ideas en el papel; en contraste el estadístico sabe que para resolver un problema requiere *datos*. b) *La transnumeración*. Consiste en las diversas transformaciones a que se someten los datos, la realización de diversos tipos de gráficas y el cálculo de números resúmenes (media, moda o

variancia; rango, desviación media, desviación estándar) para tratar de revelar la historia que cuentan los datos. c) *Consideración de la variación*. La búsqueda de patrones de variación en los datos, así como su descripción, explicación o control, de acuerdo al tipo de problema y al contexto al que pertenecen los datos. d) *Razonamiento con modelos.* Consiste en aplicar las herramientas estadísticas al problema y situación de la que provienen los datos. Estas herramientas son las que se proporcionan en los cursos tradicionales de estadística: distribuciones, muestreo, intervalos de confianza, pruebas de hipótesis y análisis de variancia. e) *Integración de lo estadístico y el contexto*.

Tabla 1. Dimensiones del modelo del pensamiento estadístico (Wild y Pfannkuch 1999)



El *ciclo interrogativo* se refiere a los procesos de producción y examen de ideas con relación al problema en una situación dada; estos consisten en la generación de ideas, búsqueda de claves e indicios en los datos, interpretación de patrones o irregularidades, crítica de los diferentes aspectos del proceso, para finalmente emitir juicios sobre la calidad y potencia del proceso y sus resultados. Finalmente las disposiciones, tienen que ver con las actitudes frente al trabajo estadístico y profesional. Estas dimensiones, así como sus contenidos constituyen una información fundamental

para el diseño de un currículo que contenga entre sus objetivos la formación de competencias estadísticas y para el profesor que asume la responsabilidad de promoverlas.

Las dimensiones del pensamiento estadístico están en un nivel superior al contenido estadístico, pues orientan acerca de cómo utilizar éste de una manera provechosa en la resolución de problemas. Entre las características del modelo anterior y las unidades de contenido específico que suelen encontrarse en los currículos, se localizan las ideas (estadísticas) fundamentales.

Las ideas estadísticas fundamentales

Un currículo basado en competencias debiera privilegiar las situaciones socialmente relevantes sobre contenidos específicos, esto implica que renunciar a incluir en el currículo el catálogo tradicional de los contenidos. Díaz-Barriga (2012) opina:

"… hay que entender que no se ha logrado superar del todo al currículo enciclopedista, tan denostado en el discurso educativo de la innovación debido a que se encuentra cargado de contenidos factuales" (p. 31)

Sin embargo, llevar a cabo una reducción radical de contenidos a favor de un enfoque por competencias, es una decisión difícil de tomar y de realizar en la práctica. ¿Cómo enseñar estadística si no se sigue la secuencia de la estadística descriptiva de comenzar con gráficas y seguir con medidas de tendencia central, medidas de variación y finalmente con regresión y correlación?

Si los contenidos del catálogo han pasado la prueba del tiempo y se han mantenido en la opinión favorable de los científicos, los elaboradores de currículo, los profesores y los padres de familia, ¿cómo elegir unos contenidos por sobre otros? O, ¿cómo explicar su posible ausencia en el currículo? Este es un problema difícil de resolver, al menos en el currículo de las matemáticas. Por ejemplo, omitir en éste algunos contenidos, tales como números primos o polinomios, bajo la justificación de que no son relevantes en la vida social de las personas, sería una afrenta para la comunidad de los matemáticos y los educadores matemáticos. En cambio, en la investigación en educación estadística se ha avanzado en proporcionar (ya sea de manera consciente o no) una salida a esta problemática, la cual ha consistido en definir ideas (estadísticas) fundamentales para organizar el currículo, estas pueden ser desarrolladas apoyándose en contenidos específicos, pero sin imponer la necesidad de cubrirlos todos, ni en un orden definido. Los investigadores en educación estadística Burril y Bielher (2011) propusieron las ideas o nociones siguientes:

- *Datos*. Los ladrillos con los que se construyen conocimientos derivados del análisis estadístico son los datos. Los problemas en los que la estadística presta ayuda son aquellos en los cuales se pueden coleccionar y analizar datos.

- *Variación.* La variabilidad está presente en cualquier fenómeno y la estadística identifica, describe, mide, explica y/o predice dicha variabilidad. A la descripción o medida de la variabilidad se le llama variación.
- *Distribución*. Una distribución es el instrumento matemático idóneo para describir un conjunto de datos y permitir a los estadísticos observar y analizar la variación presente en ellos. Una distribución teórica es la descripción de un patrón de variación de una variable aleatoria.
- *Representación*. Los diagramas y representaciones gráficas permiten descubrir y destacar diferentes ángulos de los datos y sus distribuciones, gracias a que permiten su visualización. La potencia de las representaciones se expresa cuando son utilizadas en el análisis, y no sólo como vehículos de comunicación.
- *Asociación y correlación*. Establecer relaciones entre variables es un objetivo que suele presentarse en todas las disciplinas científicas y la estadística aporta los instrumentos para analizar los distintos grados de asociación o correlación que pueden presentarse entre variables estocásticas (categóricas o numéricas).
- *Probabilidad*. En la caracterización de Moore de la estadística, éste menciona tres elementos: datos, variación y azar; estos últimos se modelan a través de la probabilidad. En cualquier resultado de la estadística se presenta incertidumbre que se describe y mide mediante modelos probabilísticos.
- *Muestreo e Inferencia*. La posibilidad de hacer afirmaciones con cierto grado de certeza acerca de una población con base en el análisis de una muestra es un objetivo fundamental de la Estadística. Los instrumentos derivados de las ideas anteriores se articulan para llevar a cabo este propósito.

La presencia de estas ideas en el currículo no es suficiente para pensarlo como dirigido hacia el desarrollo de competencias, pues se puede constatar que en gran medida tales ideas ya han estado en el currículo tradicional; sin embargo, sí ofrecen una orientación para reducir la lista de contenidos usualmente presentes en el currículo. En síntesis, la estructura del currículo tradicional no es la apropiada para el desarrollo de competencias, pero tampoco un nuevo currículo podría ser un catálogo reducido que contuviera ahora sólo las ideas fundamentales. Sin embargo, si se tienen en cuenta y se agrega la propuesta de enfocar la enseñanza de la estadística hacia la realización de investigaciones y/o proyectos, entonces se podría ir configurando la forma de un nuevo currículo. Un intento serio en este sentido se encuentra en el marco curricular para la educación estadística de de Franklin et al. (2005).

Un marco curricular para la educación estadística

Franklin et al. (2005) proponen un marco conceptual para la educación estadística de niveles preuniversitarios, el cual tiene por objetivo último el propiciar el desarrollo de la competencia estadística: "nuestras vidas están gobernadas por números. Cualquier estudiante egresado del bachillerato debe ser capaz de usar el razonamiento estadístico para enfrentarse de manera inteligente con los requerimientos de la ciudadanía, el empleo y la familia, y estar preparado para una vida productiva saludable y feliz" (p. 1). Estos autores manifiestan que el marco que proponen es un complemento de las sugerencias curriculares que sobre el tema de análisis de datos y probabilidad presentan los Principios y Estándares de la NCTM (NCTM 2000). En su propuesta se enfatiza la diferencia entre matemáticas y estadística, y se señala a la variabilidad y al papel del contexto como factores que reflejan esa diferencia.

El marco mencionado está organizado en torno a dos nociones centrales: (1) la solución de problemas estadísticos; y (2) El papel de la variabilidad en los procesos de solución de problemas estadísticos.

Los procesos de solución de problemas estadísticos involucran cuatro componentes:

1. La formulación de una pregunta
2. La recolección de datos
3. El análisis de los datos
4. La interpretación de los resultados.

Los autores sugieren que en cada una de estas cuatro componentes debe hacerse intervenir a la variabilidad. Por ejemplo, al hacer una pregunta conviene anticiparla. Mientras que en la recolección de datos se debe reconocer el papel crucial que representa, de tal manera que en algunos casos convendrá propiciarla, y en otros tratar de reducirla. En el análisis, se intentará explicar la variabilidad en los datos; y, finalmente, en la interpretación se incluirá a la variabilidad como un elemento presente de diversas formas.

El marco conceptual de Franklin et al. (2005) orienta sobre cómo organizar los procesos de solución en las situaciones-problema que se consideren socialmente relevantes, y no pone en primer plano los contenidos que tradicionalmente han sido específicos de la disciplina. Su orientación indica el desarrollo de un pensamiento estadístico como objetivo transversal.

LA PROPUESTA DE ENSEÑANZA MEDIANTE PROYECTOS ESTADÍSTICOS

La importancia de investigaciones y proyectos estadísticos

Como antes se ha mencionado, la enseñanza de la estadística a través de proyectos (Díaz et al. 2008; MacGillivray y Pereira-Mendoza 2011) se propone desarrollar el pensamiento estadístico, y la comunidad de educadores estadísticos han propuesto metodologías de enseñanza a tono con un currículo basado en el desarrollo de competencias. Esta propuesta presupone que la adquisición de contenidos específicos clave en la disciplina se realizará en el contexto de una investigación, lo que permitirá que el estudiante les asigne un sentido, se dé cuenta de su importancia y pueda utilizarlos en el desarrollo de otros proyectos. La enseñanza de la estadística a través de proyectos está basada en la instrumentación del marco curricular de Franklin et al. (2005). El carácter transversal de la propuesta consiste en que un proyecto de investigación estadística pueda realizarse de manera significativa y valiosa en el contexto de cualquier contenido disciplinar. Adicionalmente, esta metodología también es propicia para desarrollar otras competencias, como lo sugieren Díaz y colaboradores (2008).

Un proyecto para la enseñanza, es una investigación en la que se trata de responder una pregunta mediante la recogida y análisis de datos dentro de las posibilidades que tienen los alumnos del grado correspondiente. Una condición para saber si una pregunta es adecuada es preguntarse si genera un proceso investigativo:

1. La formulación de una pregunta
2. La recolección de datos
3. El análisis de los datos
4. La interpretación de los resultados.

La pregunta contar con las siguientes condiciones:

a) La pregunta o problema deben ser de interés
b) Los datos deben ser accesibles
c) Los conceptos, técnicas y razonamientos que genera deber estar al nivel de los estudiantes.

La pregunta o problema deben ser de interés. Muchas preguntas se pueden responder con datos, pero pueden carecer de interés. Es cierto que un tema puede interesar a algunos estudiantes y a otros no, y pocos pueden ser los temas que a todos les interesen. Por eso conviene al formular una pregunta responder también esta: ¿por qué es importante

responderla? Motivando el interés de quienes en principio no les es atractivo. Otro aspecto que se debe cuidar es la concreción de la pregunta. Al respecto Batanero y Díaz comentan:

> La fase de planteamiento de preguntas es una de las más difíciles. Los alumnos rara vez comienzan con un problema claramente formulado. Generalmente podrían comenzar sin preguntas claramente definidas y el papel del profesor es ayudarles a pasar de un tema general (deportes) a una pregunta que pueda contestarse (en la pasada temporada, ¿los equipos de fútbol que jugaron en su propio campo, lo hicieron mejor que los que jugaron en campo contrario? Batanero y Díaz, (2011).

Los datos sean accesibles. Los datos de un proyecto pueden ser recogidos por los propios estudiantes mediante una encuesta o mediante la observación de algún fenómeno, o también pueden ser obtenidas de bases de datos. Hay muchas bases de datos de instituciones confiables como la UNESCO. Por ejemplo, una tarea importante que debiera ser parte del curso de Estadística es conocer y explorar la página del INEGI (http://www.inegi.org.mx/) de manera que los estudiantes aprendan sobre los temas que hay en ella y los datos que ahí se pueden encontrar.

Los conceptos, técnicas y razonamientos deben ser del nivel. El aspecto más difícil es el de prever que el tipo de conceptos, técnicas y razonamiento estadísticos del proyecto elegido esté al alcance del estudiante. Se recomienda la fórmula que se plantea en la propuesta de resolución de problemas: el problema no debe ser tan fácil que se resuelva mediante rutina, ni tan difícil que sea imposible resolverlo por el estudiante. Lo que hay que evitar es que el objetivo final se vuelva aprender la técnica o el razonamiento, debe tenerse en cuenta que el objetivo debe ser el decir algo acerca de la situación de la cual provienen los datos y para se requieren ciertos conceptos, técnicas y razonamientos.

TEMAS DE PROYECTOS

Conviene que el profesor tenga una lista de posibles proyectos a desarrollar por los estudiantes, haga un análisis de los conceptos, técnicas y razonamientos que implique, que pruebe la accesibilidad de los datos y la viabilidad para ser realizados en clase. Por ejemplo, los siguientes dan una idea de alguno de ellos, sin embargo, para las condiciones específicas de cada aula se pueden determinar muchos otros:

- ¿Existe discriminación laboral respecto a la mujer?

- ¿Qué posición (económica, demográfica, política o social) tiene México en América Latina?
- ¿Tiene ventaja el equipo de fútbol que juega en su propio campo?

En el siguiente capítulo se presenta el desarrollo completo de un proyecto que proponen Batanero, Días y Gea (2012), dicho proyecto ilustra una manera diferente de concebir la enseñanza de la estadística.

Capítulo 4. Las estadísticas de pobreza y desigualdad
(Ver archivo en pdf. Cap4)

REFERENCIAS

Aoyama, K. (2007). Investigating a hierarchy of students' interpretations of graphs. *International Electronic Journal of Mathematics Education 2*(3). Online: www.iejme/.

Aoyama, K. y Stephens, M. (2003). Graph interpretation aspects of statistical literacy: A Japanese perspective, *Mathematics Education Research Journal 15*(3), 3-22.

Arteaga, Batanero, Ortiz y Contreras (2011).

Batanero, C. (2000a). Controversies around significance tests. *Mathematical Thinking and Learning, 2*(1-2), 75-98.

Batanero, B. (2000b). Significado y comprensión de las medidas de posición central. *UNO*, 25, 41-58.

Batanero, C. y Díaz, C. (Eds.). (2011). *Estadística con Proyectos.* Granada, España: Departamento de Didáctica de la Matemática.

Batanero, C. y Sánchez, E. (2005). What is the nature of high school student's conceptions and misconceptions about probability? En G. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: challenges for teaching and learning* (pp. 241-266). New York: Springer.

Beneitone, P., Esquetini, C., González, J., Maletá, M.M., Suifi, G. y Wagenaar, R. (Eds.) (2007). *Reflexiones y Perspectivas de la Educación Superior en América Latina.* Informe final – Proyecto Tuning – América Latina 2004-2007. Bilbao: Publicaciones de la Universidad de Deusto.

Burril, G. & Bielher, R. (2011). Fundamental statistical ideas in the school curriculum and in training teachers. En C. Batanero, G. Burril, C. Reading (Eds.), *Teaching Statistics in School Mathematics – Challenges for teaching an teacher education (57-69).* New York: Springer.

Cai, J. (1995). Beyond the computational algorithm.Students' unsderstanding of the arithmetic average concept. En L. Meira (Ed.), *Proceedings of the 19th PME Conference (Vol. 3, pp. 144-151).* Universidade Federal de Pernambuco, Recife, Brazil.

Carvalho, C. (1998). Tarefas estadísticas e estratégias de resposta. *Trabajo presentado en el VI Encuentro en Educación Matemática de la Sociedad Portuguesa de Ciencias de la Educación*.Castelo de Vide, Portugal.

Castro-Sotos, A. E., Van Hoof, S., Van den Noortgate, W. y Onghena, P. (2009). The transitivity misconception of Pearson's correlation coefficient. *Statistics Education Research Journal, 8*(2), 33-55.

Cobb, P. & Moore, D. (2000). Statistics and mathematics: tension and cooperation. *The American Mathamtical Monthly* (August – September), 615-630.

Cobo, B. y Batanero, C. (2000). La mediana en la educación secundaria obligatoria: ¿Un concepto sencillo? UNO 23, 85-96.

Curcio, F. R. (1987). Comprehension of mathematical relationships expressed in graphs. J*ournal for Research in Mathematics Education,* 18 *(5),* 382-393.

Day, A. (Ed.) (1992), *The annual register 1992*, 234. London: Longmans.

Díaz, C., Arteaga, P. y Batanero, C. (2008), Contribución del trabajo con proyectos estadísticos a la adquisición de competencias básicas. En M., Molina, P. Perez-Tyteca y M. Fresno (2008). *Investigación en el Aula de Matemáticas. Competencias Matemáticas*. Granada: SEAM. Thales y Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Díaz, C. y de la Fuente, I. (2005). Razonamiento sobre probabilidad condicional e implicaciones para la enseñanza de la estadística. *Epsilon,59*. 245-260.

Díaz-Barriga, F. (2012). Reformas curriculares y cambio sistémico: una articulación ausente pero necesaria para la innovación. *Revista Iberoamericana de Educación Superior (RIES), 3*(7), 23-40.

Estepa, A. (1995). Consideraciones sobre la enseñanza de la asociación estadística. *UNO, 5*, 69-79.

Estepa, A. (2007). Caracterización del significado de la correlación y regresión en estudiantes de Educación Secundaria. *Zetetiké 15*(28), 119-151.

[En línea: http://ries.universia.net/index.php/ries/article/view/229]

Fischhoff, B. y Kadvany, J. (2011). *Risk: A very short introduction*. United States: Oxford University Press.

Franklin, C., Kader, G., Newborn, D.S., Moreno, J., Peck, R., Perry, M. & Schaeffer, R. (2005), A Curriculum Framework for pre K-12 Statistics Education. *Informe presentado a la American Statistical Association.*

Gal, I. (2004). Statistical literacy: Meanings, componentes, responsabilities. En D. Ben-Zvi y J. Garfield (Eds.), *The Challenge of Developing Statistical Literacy, Reasoning, and Thinking (47-78).* Dordrecht: Kluwer.

Gattuso, L. y Mary, C. (1996). Development of concepts of the arithmetic average from high school to University. Proceedings of the 20th Conference of the International Group

for the Psychology of Mathematics Education.(Vol. I, pp. 401-408). Universidad de Valencia.

Gattuso, L. y Mary, C. (2002). Development of the concept of weighted average among high-school children. En B. Phillips (Ed.), Proceedings of the Sixth International Conference on Teaching Statistics.[CD-ROM]. Cape Town: International Association forStatistical Education.

Goñi Zabala, J.M. (2005). *El Espacio Europeo de Educación Superior, un reto para la universidad*. Barcelona: Octaedro / ICE Universidad de Barcelona.

Goñi Zabala, J.M. (2008). $3^2 - 2$ *ideas clave. El Desarrollo de la Competencia Matemática.* Barcelona: Editorial GRAÓ.

INCE (2004). *Marcos Teóricos de PISA 2003: La medida de conocimientos y destrezas en matemáticas, lectura, ciencias y resolución de problemas.* Madrid: MEC. (En línea: www.ince.mec.es/pub/marcoteoricopisa2003.pdf)

Li, D. Y. y Shen, S. M. (1992). Students' weaknesses in statistical projects. *Teaching Statistics 14* (1), 2-8.

MacGillivray, H. & Pereira-Mendoza, L. (2011). Teaching statistical thinking through investigative projects. En D. Ben-Zvi y J. Garfield (Eds.), *The Challenge of Developing Statistical Literacy, Reasoning, and Thinking (109-120).* Dordrecht: Kluwer.

Mayén, S. (2009). *Comprensión de las medidas de tendencia central en estudiantes mexicanos de educación secundaria y bachillerato.* Tesis Doctoral no publicada. Universidad de Granada

Monteiro, C. y Ainley, J. (2007). Investigating theinterpretation of media graphs among student teachers. *International Electronic Journal of Mathematics Education 2*(3),188-207. Online: http://www.iejme/.

Moritz, J. (2004). Reasoning about covariation. En D. Ben-Zvi y J. Garfield (Eds.*), The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking (pp. 221-255).* Dordrecht: Kluwer.

Moore, D. S. (1998). Statistics among the liberal arts. *Journal of American Statistical Association, 93*, 1253-1259.

Moore, D. S. (1992). Teaching statistics as a respectable subjetct. En F. Gordon y S. Gordon (Eds.), *Statistics for the Twenty-first century (14-25).* Washington D.C.: Mathematical Association of America.

NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics.* Reston, VA.: The National Council of Teachers of Mathematics.

Orta (…)

Pollatsek, A., Lima, S. y Well, A.D. (1981). Concept or computation: Students'understanding of the mean. *Educational Studies in Mathematics, 12,*191-204.

Perrenoud, P. (2002). Construir Competencias en la Escuela. Santiago de Chile: Ed. Dolmen.

Rouncenfield (1995). The statistics of poverty and inequality. *Journal of Statistics Education, 3*(2).

Rossman, A., Chance, B. & Medina, E. (2006). Some important comparisons between statistics and mathematics, and why teachers should care. En G.F. Burril y P.C. Elliot (Eds.), *Thinking and Reasoning with Data and Chance. (Sixty-eight Yearbook]*. Reston, VA.: National Council of Teachers of Mathematics.

Sánchez Cobo, F.T. (1999). *Significado de la correlación y regresión para los estudiantes universitarios*. Tesis doctoral. Universidad de Granada.

Schield, M. (2006). Statistical literay survey analysis: reading graphs and tables of rates percentages. En B. Phillips (Ed.), *Proceedings of the Sixth International Conference on Teaching Statistics*. Cape Town: International Association for Statistical Education. Online: http://www. stat.auckland.ac.nz/~iase.

Schoenfeld, A. & Hermann, D. (1982). Problem perception and knoeledge structure in expert and novice mathematical problem solvers. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory and Cognition 8*(5), 484-494.

Shaughnessy, J. M. (1997). Missed opportunities in research on the teaching and learning of data andchance. In F. Bidulph& K. Carr (eds.) *Proceedings of the Twentieth Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* , 6-22. Rotorua, N.Z.: University of Waikata.

Tormo, C. (1995). Dificultades del alumnado respecto a la media aritmética. *UNO, 5*, 29-36.

U.N.E.S.C.O. (1990). *Demographic year book1990*. New York: United Nations.

Watson, J.M. (2006). *Statistical Literacy at School: Growth and Goals*. Mahawah, NJ.: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Watson, J. M. y Moritz, J. B. (2000). The longitudinal development of understanding of average. *Mathematical Thinking and Learning.* 2(1 y 2), 11-50.

Wild, C. & Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. *International Statistical Review, 67*(3), 223-262.